Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle
examen final
lundi 6 janvier 2025
durée 2H

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $u_0 = 3$ et $\forall\, n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2 \Rightarrow u_n > u_{n+1} > 2$.

Si $u_n > 2$, alors u_{n+1} est bien défini et

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1} \\ &= -\frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1} < 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} < u_n. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2 = \frac{2u_n - 4}{u_n + 1} \\ &= 2\frac{u_n - 2}{u_n + 1} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 2. \end{aligned}$$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite. La suite (u_n) est donc définie pour tout n et est décroissante minorée d'après la question précédente. C'est donc une suite convergente.

c) Montrer que la suite (x_n) définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$$

est géométrique.

Pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - 2}$$

$$= \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1} - 1}{\frac{4u_n-2}{u_n+1} - 2}$$

$$= \frac{\frac{4u_n-2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{4u_n-2-2u_n-2}{u_n+1}}$$

$$= \frac{3u_n - 3}{2u_n - 4}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{u_n - 1}{u_n - 2} = \frac{3}{2}x_n.$$

Lasuite (x_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

d) En déduire u_n en fonction de n.

Pour tout $n \geqslant 0$,

$$x_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n x_0$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{3-1}{3-2}$$

$$= 3.\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Or,

$$x_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2} \Leftrightarrow u_n(x_n - 1) = 2x_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{2x_n - 1}{x_n - 1}$$

$$== \frac{6.\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}{3.\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1}$$

$$= \frac{2.3^{n+1} - 2^n}{3^{n+1} - 2^n}.$$

Exercice 2 a) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est-elle absolument convergente ? *Justifier sa réponse.*

Non. En effet, la suite de terme général $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \left|\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy car

$$\sigma_{2n} - \sigma_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \not\to_{n\infty} 0$$

donc ne converge pas !

b) On pose $\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que la suite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ est croissante et que la suite $(S_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(S_{2n})_n$ est strictement croissante.

De même

$$\begin{aligned} S_{2n+1} - S_{2n-1} &= \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0 \end{aligned}$$

donc la suite $(S_{2n-1})_n$ est strictement décroissante.

c) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $S_{2n} \leqslant S_{2n-1}$. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_{2n-1} - S_{2n} = -\frac{(-1)^{2n-1}}{2n} = \frac{1}{2n} > 0$$

donc $S_{2n} < S_{2n-1}$.

La suite (S_{2n}) est croissante et majorée par S_1 donc converge vers une limite $S \in \mathbb{R}$. De même la suite (S_{2n-1}) est décroissante et minorée par S_0 donc converge vers une limite $S' \in \mathbb{R}$.

De plus $S = S'$ car

$$S - S' = \lim_n S_{2n-1} - S_{2n} = \lim_n \frac{1}{2n} = 0.$$

Donc la suite (S_n) converge vers $\lim S_n = S = S'$.

d) En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\forall\, n \geqslant 1,\ S_{2n} < \ln 2 < S_{2n-1}$$

et en déduire la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_{>0}$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$, $n \geqslant 0$ à la fonction ln entre 1 et 2, on trouve :

$$\ln 2 = \ln 1 + \ldots + \frac{\ln^{(n)}(1)}{n!}\underbrace{(2-1)^n}_{=1} + \frac{\ln^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(2-1)^{n+1}$$

pour un certain $1 < c < 2$.

Or,

$$\forall\, x > 0,\ \forall\, k \geqslant 1,\ \ln^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

donc :

$$\begin{aligned}\forall\, n \geqslant 1,\ \exists\, 1 < c < 2,\ \ln 2 &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{c^{n+1}}\\ &= S_n + \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{c^{n+1}}.\end{aligned}$$

Donc $S_{2n} = \ln 2 - \frac{1}{2n}\frac{1}{c^{2n+1}} < \ln 2$. On a aussi :

$$S_{2n-1} = \ln 2 + \frac{1}{2n-1}\frac{1}{c^{2n}} > \ln 2.$$

On en déduit :

$$\lim S_{2n} \leqslant \ln 2 \leqslant \lim S_{2n-1}$$

or, $\lim S_{2n} = \lim S_{2n-1} = \lim S_n$ donc $\lim S_n = \ln 2$.

e) Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$, $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites. On suppose que $\forall\, n \geqslant 1$, $a_n > 0$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge. Montrer que si $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge aussi. On a $\lim \frac{b_n}{a_n} = 1$ Donc la suite $\frac{b_n}{a_n}$ est majorée par une constante $C > 0$.

Alors $\forall\, n$, $\frac{b_n}{a_n} \leqslant C \Rightarrow b_n \leqslant C a_n$. Donc, $\sum_{n\geqslant 1} b_n \leqslant C \sum_{n\geqslant 1} a_n < \infty$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ converge.

f) Donner un contre-exemple si (a_n) n'est pas de signe constant. Soient

$$\forall\, n \geqslant 1,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n},\ b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{1}{n \ln n}.$$

On a :

$$b_n = a_n \underbrace{\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}\right)}_{\to 1} \sim a_n,$$

la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge mais la série $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ diverge car $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\ln n} = \infty$ †.

g) On suppose toujours que $\forall\, n \geqslant 1,\ a_n > 0,\ \sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge et que $a_n \sim b_n$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \ .$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N > 0$ tel que

$$\forall\, n \geqslant N,\ 1-\epsilon < \frac{b_n}{a_n} < 1+\epsilon$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geqslant N,\ (1-\epsilon)a_n < b_n < (1+\epsilon)a_n$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geqslant N,\ (1-\epsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n \leqslant (1+\epsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n.$$

h) En déduire que $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$. Puisque

$$\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}.$$

i) On pose $\forall\, n \geqslant 1,\ \gamma_n = \ln n - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

On a

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}$$

$$= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

†. En effet, $\ln\ln(n+2) - \ln\ln(n+1) \sim \frac{1}{n\ln n}$ et $\sum_{k=1}^{n} \ln\ln(k+2) - \ln\ln(k+1) = \ln(n+2) - \ln\ln 2 \to \infty$.

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

j) En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel γ, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

et que

$$\gamma - \gamma_n \sim \frac{1}{2n} \ .$$

Or la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n^2}$ converge donc la suite $\sum_{k=1}^{n} \gamma_{k+1} - \gamma_k = \gamma_{n+1} - \gamma_1$ converge aussi vers un réel. Donc la suite (γ_n) aussi. Notons $\gamma = \lim_n \gamma_n$. Alors $\sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{k+1} - \gamma_k = \gamma - \gamma_{n+1}$. On a

$$\gamma_n = \gamma + o(1)$$
$$\Rightarrow \ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \gamma + o(1)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n - \gamma + o(1) \sim \ln n.$$

De plus, on a :

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{1}{2n^2}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{k+1} - \gamma_k = \gamma - \gamma_{n+1} \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$$
$$\Rightarrow \gamma - \gamma_n \sim \frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2n}.$$

Exercice 3 Pour tout $x \geqslant 0$, soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ? *Justifier sa réponse.*

Pour tout $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}}{x}$$

$$= \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \infty$$

donc f n'est pas dérivable (à froite) en 0.

b) Montrer que la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$, donner l'équation de l'asymptote et la position du graphe de f par rapport à cette droite.
Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{3}(+\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) + \binom{\frac{1}{3}}{2} + (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})^2 + o(\frac{1}{x^2})\right) \\
&= x\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{9x^2} + o(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= x\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{2}{9x^2} + o(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= x + \frac{1}{3} + \frac{2}{9x} + o(\frac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x - \frac{1}{3} = 0$$

et le graphe de f a une asymptote d'équation

$$y = x + \frac{1}{3}$$

« au voisinage de l'∞ ».

De plus

$$f(x) - x - \frac{1}{3} \sim_{+\infty} \frac{2}{9x}$$

donc comme $\forall\, x > 0$, $\frac{2}{9x} > 0$, le graphe de f est au-dessus de l'asymptote (au voisinage de l'infini).