Fonctions convexes

Définition. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si :

$$\forall\, x, x' \in I,\ \forall\, 0 \leqslant t \leqslant 1,\ f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x')\ .$$

On dit que f est *concave* si $-f$ est convexe.

Proposition. Soit f une fonction convexe sur I. Montrer que

$$\forall\, x_1, ..., x_n \in I,\ \forall\, t_1, ..., t_n \geqslant 0,\ t_1 + ... + t_n = 1 \Rightarrow$$

$$f(t_1x_1 + ... + t_nx_n) \leqslant t_1f(x_1) + ... + t_nf(x_n)\ .$$

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Sont équivalentes :

i) f est convexe ;

ii) $\forall\, a \in I$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Sont équivalentes.

i) f est convexe ;

ii) f' est croissante ;

iii) « le graphe de f est au-dessus de ses tangentes ».

Corollaire. Si f'' existe, alors f est convexe $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$.

Exercice. Les fonctions $-\ln x$, x^p, $(1 + x^p)^{\frac{1}{p}}$, si $p \geqslant 1$ sont convexes.

Inégalité arithmético géométrique. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Alors

$$(x_1...x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n}\ .$$

Inégalité de Hölder. Soient $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\ .$$

Inégalités de Minkowski. Soient $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, soit $p \geqslant 1$. Alors

1)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\ .$$

2)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{p}}\right)^p + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{\frac{1}{p}}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{\frac{1}{p}}\right)^p \quad .$$

Démonstration : Soit $p \geqslant 1$. Posons

(1) $$|x|_p := \sqrt[p]{x_1^p + ... + x_n^p}$$

(2) $$|y|_p := \sqrt[p]{y_1^p + ... + y_n^p} \quad .$$

Comme la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe, si $\lambda = \frac{|x|_p}{|x|_p + |y|_p}$, alors

(3) $$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \left(\lambda \frac{x_i}{\lambda} + (1-\lambda)\frac{y_i}{1-\lambda}\right)^p \leqslant \lambda \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^p + (1-\lambda)\left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right)^p$$

(4) $$\Rightarrow (x_i + y_i)^p \leqslant \lambda \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^p + (1-\lambda)\left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right)^p$$

(5) $$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \leqslant \lambda \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^p + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{1-\lambda}\right)^p$$

(6) $$\Rightarrow |x+y|_p^p \leqslant \lambda \frac{|x|_p^p}{\frac{|x|_p^p}{(|x|_p + |y|_p)^p}} + (1-\lambda) \frac{|y|_p^p}{\frac{|y|_p^p}{(|x|_p + |y|_p)^p}}$$

(7) $$= (|x|_p + |y|_p)^p$$

Q.e.d.