Chapitre III
Continuité

1 Définition

Définition. Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que f est continue en a si :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a) \ .$$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si $\forall\, a \in I$, f est continue en a.

Exemples. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, $|\cdot|$ est continue sur $\mathbb{R}$, log est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$, exp est continue sur $\mathbb{R}$.

Contre-exemple. La fonction

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est discontinue en 0.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit $a \in I$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) dans I,

$$\lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a) \ .$$

2 Opérations

Proposition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$, soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues en a. Alors

$$f + g,\ fg$$

sont continues en a. Si de plus $g(a) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi continue en a.

Proposition. Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$. Soient $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est continue en a, si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

3 Compacité

Théorème. Soient $a \leqslant b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\exists\, a \leqslant c \leqslant b,\ f(c) = \sup_{[a,b]} f \ .$$

Remarque. En particulier, $\sup f < \infty$!

Démonstration : On définit par récurrence deux suites (a_n), (b_n) :

$$a_0 = a,\ b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

si $\sup_{[a_n, b_n]} f = \sup_{\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]} f$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = b_n$$

sinon.

Alors $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$, $\forall\, n$, $a_n \leqslant b_n$, $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Donc $\lim a_n = \lim b_n = c \in [a,b]$.

Or, pour tout n,

$$\sup_{[a_n, b_n]} f = \sup_{[a,b]} f =: S \ .$$

Soit (s_n) une suite strictement croissante qui tend vers S †. Pour tout n, il existe

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n \text{ tel que } s_n < f(x_n) \ .$$

Mais

$$\lim a_n = \lim b_n = \lim x_n = c \Rightarrow \lim f(x_n) = f(c) \Rightarrow S \leqslant f(c) \Rightarrow f(c) = S \ .$$

Q.e.d.

4 Connexité

Théorème. Soient $a \leqslant b$ réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$, alors il existe $a < c < b$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration : On pose $c = \sup\{a \leqslant x \leqslant b \ : \ f(x) < 0\}$ ... **Q.e.d.**

Exercice. Soit $P(x)$ un polynôme de degré 3 réel. Alors P admet une racine réelle.

†. Par exemple $s_n = S - \frac{1}{n+1}$ si $S \in \mathbb{R}$, $s_n = n$ si $S = +\infty$.

5 Uniforme continuité

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est *uniformément continue* sur I si

$$\forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, \eta > 0,\, \forall\, x, y \in I,\, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon\ .$$

Remarque. Uniforme continuité $\Rightarrow$ continuité.

Exercice. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

Indication : considérer par exemple $x_n = n$, $y_n = n + \frac{1}{n}$.

Théorème. Soient $a \leqslant b$ réels. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.

Démonstration : Si f n'est pas uniformément continue, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0},\, \exists\, x_n,\, y_n \in [a, b],\, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \epsilon\ .$$

La suite (x_n) est bornée donc on peut en extraire *une sous-suite convergente* (*cf.* le chapitre (à venir) sur les suites) : il existe

$$\varphi : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$$

strictement croissante telle que $\lim_n x_{\varphi(n)}$ existe dans $[a, b]$. Or,

$$\forall\, n,\, \varphi(n) \geqslant n \Rightarrow \lim \varphi(n) = +\infty\ .$$

donc

$$|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)} \to 0$$

donc $\lim y_{\varphi(n)} = \lim x_{\varphi(n)} =: c$.

Mais alors par continuité,

$$\lim |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |f(c) - f(c)| = 0$$

contradiction ! Car $\forall\, n$, $[| \lim f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geqslant \epsilon$. **Q.e.d.**