

Licence de mathématiques  
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle  
examen de deuxième session

jeudi 26 juin 2025

durée 1H30

24

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

**Exercice 1** Soient  $u_0 = 0$  et  $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{2u_n - 9}{u_n + 8}$ .

- 2 a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n > -3 \Rightarrow u_n > u_{n+1} > -3$ .  
2 b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et trouver sa limite.  
c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$x_n = \frac{1}{u_n + 3}.$$

2 Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et que c'est une suite arithmétique.

- 2 d) En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$ .

2 **Exercice 2** a) La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  est-elle absolument convergente? Justifier sa réponse.

- 1 b) On pose  $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ . Montrer que la suite  $(S_{2n})_{n \geq 0}$  est décroissante et que la suite  $(S_{2n+1})_{n \geq 0}$  est croissante.

- 2 c) Montrer que pour tout  $n \geq 0, S_{2n} \geq S_{2n+1}$ . En déduire que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$  converge.

- d) Soient  $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$  deux suites réelles  $> 0$ .

4 On suppose que  $\sum_{n \geq 0} a_n$  diverge. Montrer que si  $a_n \sim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , alors la série  $\sum_{n \geq 0} b_n$  diverge aussi et que  $\sum_{k=0}^n a_k \sim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n b_k$ .

- 2 e) Montrer que  $\frac{1}{2n+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+2) - \ln(n+1)}{2}$  et en déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln n.$$

**Exercice 3** Pour tout  $x \neq 0$ , soit  $f(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ .

- 2 a) La fonction  $f$  est-elle prolongeable par continuité en 0? *Justifier sa réponse.*
- 3 b) Montrer que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique en  $+\infty$ , donner l'équation de l'asymptote et la position du graphe de  $f$  par rapport à cette droite.