

Licence de mathématiques
L3, parcours « enseignement » – analyse réelle
examen final
lundi 6 janvier 2025
durée 2H

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 Soit $u_0 = 3$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

- 2 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2 \Rightarrow u_n > u_{n+1} > 2$.
1,5 b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.
c) Montrer que la suite (x_n) définie par

1
$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}$$

est géométrique.

- 1 d) En déduire u_n en fonction de n .

Exercice 2 a) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est-elle absolument convergente? Justifier sa réponse.

- 1 b) On pose $\forall n \geq 1, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que la suite $(S_{2n})_{n \geq 1}$ est croissante
2 et que la suite $(S_{2n-1})_{n \geq 1}$ est décroissante.

- 1 c) Montrer que pour tout $n \geq 1, S_{2n} \leq S_{2n-1}$. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

- d) En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

2,5
$$\forall n \geq 1, S_{2n} < \ln 2 < S_{2n-1}$$

et en déduire la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

- 1 e) Soient $(a_n)_{n \geq 1}, (b_n)_{n \geq 1}$ deux suites. On suppose que $\forall n \geq 1, a_n > 0$.
On suppose que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Montrer que si $a_n \sim b_n$, alors la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge aussi.

- 2 f) Donner un contre-exemple si (a_n) n'est pas de signe constant.
- 1 g) On suppose toujours que $\forall n \geq 1, a_n > 0$, $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que $a_n \sim b_n$.

Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k .$$

- 1 h) En déduire que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

- 1 i) On pose $\forall n \geq 1, \gamma_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Montrer que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim \frac{1}{2n^2}$.

- j) En déduire que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel γ , que

3
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$$

et que

$$\gamma - \gamma_n \sim \frac{1}{2n} .$$

Exercice 3 Pour tout $x \geq 0$, soit $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x}$.

- 1 a) La fonction f est-elle dérivable en 0? *Justifier sa réponse.*
- b) Montrer que la fonction f admet une asymptote oblique en $+\infty$, donner l'équation de l'asymptote et la position du graphe de f par rapport à cette droite
- 2 *au voisinage de l'infini.*