

## Deux exemples de suites adjacentes et définitions de l'exponentielle et du logarithme

### Démonstration :

- i)  $e_n(x) \leq E_n(x) \Leftrightarrow (1 + \frac{x}{n})^n (1 - \frac{x}{n})^n \leq 1 \Leftrightarrow (1 - \frac{x^2}{n^2})^n \leq 1$ .
- ii) Montrons que  $(E_n(x))_{n \geq N}$  décroît.

Si  $n \geq N$ , alors

$$\begin{aligned} \frac{E_n(x)}{E_{n+1}(x)} &= \frac{\frac{1}{(1-\frac{x}{n})^n}}{\frac{1}{(1-\frac{x}{n+1})^{n+1}}} \\ &= \frac{(1 - \frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1 - \frac{x}{n})^n} \\ &= \left( \frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}} \right)^{n+1} \left( 1 - \frac{x}{n} \right) \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned} \frac{1 - \frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n}} &= \frac{(n+1-x)n}{(n-x)(n+1)} = \frac{(n-x)n + n}{(n-x)(n+1)} = \frac{(n-x)(n+1) - (n-x) + n}{(n-x)(n+1)} \\ &= 1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)} . \end{aligned}$$

Donc d'après l'inégalité de Bernoulli :

$$\begin{aligned} \frac{E_n(x)}{E_{n+1}(x)} &= \left( 1 + \frac{x}{(n+1)(n-x)} \right)^{n+1} \left( 1 - \frac{x}{n} \right) \\ &\geq \left( 1 + \frac{x}{n-x} \right) \left( 1 - \frac{x}{n} \right) = 1 . \end{aligned}$$

- iii) Pour tout  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 \leq E_n(x) - e_n(x) &= \frac{1}{(1 - \frac{x}{n})^n} - \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n \\ &= \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{n^2})^n}{(1 - \frac{x}{n})^n} \end{aligned}$$

or, d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$\left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

donc :

$$0 \leq E_n(x) - e_n(x) \leq \frac{x^2}{n} E_n(x) \leq \frac{x^2}{n} E_N(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Q.e.d.

*Propriétés.*

- i)  $\mathcal{E}xp(0) = 1$  ;
- ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{E}xp(x) > 0$  ;
- iii)  $\forall x, x' \in \mathbb{R}, \mathcal{E}xp(x + x') = \mathcal{E}xp(x)\mathcal{E}xp(x')$  ;

**Lemme.** Soit  $(x_n)$  une suite réelle qui converge vers  $x \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_n \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \mathcal{E}xp(x) .$$

**Démonstration :** Comme la suite  $(x_n)$  converge, il existe  $N > \sup_n |x_n| + |x|$ .

Si  $n \geq N$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n}{e_n(x)} &= \left(\frac{n + x_n}{n + x}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{x_n - x}{n + x}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{n + x}(x_n - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Bernoulli.

Mais on a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n}{e_n(x)} &= \left(1 + \frac{x_n - x}{n + x}\right)^n \\ &\leq \frac{1}{\left(1 - \frac{x_n - x}{n + x}\right)^n} \\ &\leq \frac{1}{1 - n \frac{x_n - x}{n + x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

en utilisant encore l'inégalité de Bernoulli.

Q.e.d.

**Démonstration :** (*des propriétés*)

ii),  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq N > |x|, e_n(x) \geq e_N(x) > 0$ .

iii) On a

$$e_n(x)e_n(x') = \left( \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x'}{n}\right) \right)^n = \left( 1 + \frac{x + x' + \frac{xx'}{n}}{n} \right)^n .$$

Or,  $\lim_n x + x' + \frac{xx'}{n} = x + x'$  donc d'après le lemme précédent,

$$\mathcal{E}xp(x)\mathcal{E}xp(x') = \lim_n e_n(x)e_n(x') = \mathcal{E}xp(x + x') .$$

Q.e.d.

## 1 Définition du logarithme

*Remarques.* Soient  $n > x > 0$ .

$$y = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \Leftrightarrow x = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$y = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \Leftrightarrow x = n \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right) .$$

## 2 Définition du logarithme

Soit  $x > 0$ , soit  $N > |x|$ . Pour tout  $n \geq N$ , on note :

$$\lambda_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1), \quad L_n(x) = n \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}\right) .$$

### Proposition.

- i)  $\forall n \geq N, \lambda_n(x) \geq L_n(x)$ .
- ii) La suite  $(\lambda_n(x))_{n \geq N}$  est décroissante et la suite  $(L_n(x))_{n \geq N}$  est croissante.
- iii)  $\lim_n \lambda_n(x) - L_n(x) = 0$ .

On notera  $\mathcal{L}og(x) := \lim_n \lambda_n(x) = \lim_n L_n(x)$ .

**Démonstration :**

i)

$$\begin{aligned}\lambda_n(x) - L_n(x) &= n \left( x^{\frac{1}{n}} - 2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right) \\ &= n \left( \sqrt[n]{x} - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right)^2 \geq 0 .\end{aligned}$$

ii) Soit  $x > 0$ . Si  $0 < x < n$ , alors d'après l'inégalité de Bernoulli,

$$\begin{aligned}x < 1 + x &\leq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow x^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{x}{n} \\ \Rightarrow \lambda_n(x) &= n(x^{\frac{1}{n}} - 1) < x < n .\end{aligned}$$

Soit  $N > x > \lambda_n(x)$ . Alors comme la suite  $(e_k(\lambda_n(x)))_{k \geq N}$  est croissante :

$$\forall n \geq N, x = e_n(\lambda_n(x)) \leq e_{n+1}(\lambda_n(x))$$

or,  $x = e_{n+1}(\lambda_{n+1}(x))$  d'où

$$\begin{aligned}e_{n+1}(\lambda_{n+1}(x)) &\leq e_{n+1}(\lambda_n(x)) \\ \Rightarrow \lambda_{n+1}(x) &\leq \lambda_n(x)\end{aligned}$$

car la fonction  $t \mapsto e_{n+1}(t)$  est croissante sur  $] -n-1, +\infty[$  et

$$\lambda_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1) > -n > -n-1, \lambda_{n+1}(x) = (n+1)(x^{\frac{1}{n+1}} - 1) > -n-1 .$$

Doit  $N > x$ . Si  $n \geq N$ , alors

$$\forall n \geq N, \forall t \leq n, E_n(t) \geq E_{n+1}(t)$$

car la suite  $E_n(t)_{n \geq t}$  est décroissante.Or,  $L_n(x) = n \left( 1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right) < n$  donc :

$$\begin{aligned}x &= E_n(L_n(x)) \geq E_{n+1}(L_n(x)) \\ \Rightarrow x &= E_{n+1}(L_{n+1}(x)) \geq E_{n+1}(L_n(x)) \quad (*) .\end{aligned}$$

Or,

$$\forall k, t \mapsto E_k(t)$$

est strictement décroissante sur  $] -\infty, k[$  et

$$L_n(x) < n < n+1, L_{n+1}(x) < n+1 .$$

Donc

$$(*) \Rightarrow L_{n+1}(x) \geq L_n(x) .$$

$$\Rightarrow L_{n+1}(x) \geq L_n(x)$$

iii)

$$\begin{aligned} \forall 0 < x < n, \lambda_n(x) - L_n(x) &= n \left( x^{\frac{1}{n}} - 2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \right) \\ &= n \left( \sqrt{x^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{\sqrt{x^{\frac{1}{n}}}} \right)^2 \\ &= \frac{n}{x^{\frac{1}{n}}} (x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \\ &= \frac{\lambda_n(x)}{x^{\frac{1}{n}}} (x^{\frac{1}{n}} - 1) . \end{aligned}$$

Or,  $x^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{\lambda_n(x)}{n}$  donc  $\lim_n x^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Donc  $\lim_n \lambda_n(x) - L_n(x) = 0$ .

Q.e.d.

*Propriétés.*

- i)  $\mathcal{L}og(1) = 0$ ;
- ii)  $\forall x \in \mathbb{R}, \mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = x, \forall x > 0, \mathcal{E}xp(\mathcal{L}og(x)) = x$ ;
- iii)  $\forall x, x' > 0, \mathcal{L}og(xx') = \mathcal{L}og(x) + \mathcal{L}og(x')$ ;

**Démonstration :**

- i) *Facile !*
- ii) Soit  $x > 0$ . Comme  $\lim_n \lambda_n(x) = \mathcal{L}og(x), x = \lim_n e_n(\lambda_n(x)) = \mathcal{E}xp(\mathcal{L}og(x))$ .  
Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme la suite  $(E_n(x))_n$  est décroissante, on a  $E_n(x) \geq \mathcal{E}xp(x)$   
Or, les fonctions  $L_n$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}^{+*}$  donc

$$\begin{aligned} L_n(\mathcal{E}xp(x)) &\leq L_n(E_n(x)) = x \\ \Rightarrow \mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) &= \lim_n L_n(\mathcal{E}xp(x)) \leq x \end{aligned}$$

De même comme la suite  $(e_n(x))_n$  est croissante et comme les fonctions  $\lambda_n$  sont croissantes sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , on trouve :

$$x = \lambda_n(e_n(x)) \leq \lambda_n(\mathcal{E}xp(x))$$

$$\Rightarrow x \leq \mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = \lim_n L_n(\mathcal{E}xp(x)) .$$

Donc  $\mathcal{L}og(\mathcal{E}xp(x)) = x$ .

iii) Pour tout  $x, x' > 0$ ,

$$n((xx')^{\frac{1}{n}} - 1) = x'^{\frac{1}{n}} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) + n(x'^{\frac{1}{n}} - 1)$$

$$\rightarrow_{n\infty} \mathcal{L}og(x) + \mathcal{L}og(x')$$

car  $\lim_n x'^{\frac{1}{n}} = 1$ .

Q.e.d.