Université Claude Bernard Lyon 1 — Année universitaire 2024-2025
Département de Mathématiques — L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 8
RECHERCHE DE VALEURS PROPRES, MOINDRES CARRÉS

Exercice 1. *Un exemple où la méthode de la puissance échoue*
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer les modes propres de A, i.e. ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.
(2) Soit $x \in \mathbb{C}^2$ non nul.
  (a) Calculer $(A^k x)_{k\in\mathbb{N}}$.
  (b) On pose $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{A^k x}{\|A^k x\|}\right)_k$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme hermitienne canonique sur $\mathbb{C}^2$. À quelle condition sur x la suite $(\langle x_k, Ax_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers une valeur propre de A ?

Exercice 2. *Méthode de la puissance inverse avec translation*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ($p \leq n$) ses valeurs propres deux à deux distinctes. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ donné, on souhaite calculer λ_i. Soit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$x^{(0)} \notin (\ker(A - \lambda_i I))^\perp$$

Soit μ tel que, pour tout $j \neq i$, $0 < |\mu - \lambda_i| < |\mu - \lambda_j|$. On définit, à partir de $x^{(0)}$, la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par la récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (A - \mu I)y^{(k+1)} = x^{(k)}, \qquad x^{(k+1)} = \frac{y^{(k+1)}}{\|y^{(k+1)}\|}$$

où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

(1) Vérifier que la construction de $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ revient à appliquer la méthode de la puissance à la matrice $(A - \mu I)^{-1}$.
(2) On définit à chaque étape $\gamma^{(k)} = \mu + \dfrac{1}{\langle x^{(k)}, y^{(k+1)}\rangle}$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \gamma^{(k)} = \lambda_i$.

Exercice 3. *Régression linéaire*
Déterminer la droite du plan qui passe au plus près (au sens des moindres carrés) des points $(0,1)$, $(1,2)$ et $(3,3)$.

Exercice 4. *Approximation polynomiale au sens des moindres carrés*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$. On souhaite approcher une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont on connaît seulement les valeurs $y_1, \dots, y_n$ qu'elle prend en n points $t_1, \dots, t_n$. Pour cela on fixe un degré $d \in \mathbb{N}$ et on détermine une approximation de f dans l'espace $\mathcal{P}_d$ des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On cherche donc $P \in \mathcal{P}_d$ tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(t_1) \\ \vdots \\ P(t_n) \end{pmatrix} \right\| = \min_{Q\in\mathcal{P}_d} \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q(t_1) \\ \vdots \\ Q(t_n) \end{pmatrix} \right\|.$$

(1) Écrire le problème comme la résolution au sens des moindres carrés d'un système $A\,x = b$ pour une certaine matrice $A \in \mathcal{M}_{n,d+1}(\mathbb{R})$ et un certain vecteur $b \in \mathbb{R}^n$.
(2) Pour $d = 0$ puis $d = 1$, résoudre explicitement le problème quand il possède une unique solution.
(3) On suppose que les points $t_1, \dots, t_n$ sont deux à deux distincts.
À quelle condition sur d la matrice A^*A est-elle inversible ?

Exercice 5. *Moindres carrés et décomposition QR*
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$. On suppose que A est de rang n. On rappelle que la méthode de Householder permet d'obtenir, dans ce cas, une décomposition QR de la forme

$$A = Q \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ O_{m-n,n} \end{pmatrix} .$$

où $Q \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale et $\tilde{R} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs.

(1) Montrer que $\tilde{R}$ est inversible.
(2) Montrer que résoudre le problème $Ax = b$ (pour $b \in \mathbb{R}^m$) au sens des moindres carrés est équivalent à résoudre une équation du type $\tilde{R}x = c$.
(3) Soit la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Identifier Im D et Ker D.
(b) On vérifie que D admet une décomposition $D = QR$ avec

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Résoudre au sens des moindres carrés le problème $Dx = \begin{pmatrix} 1 \; 1 \; 1 \; 1 \end{pmatrix}^t$.
(c) Que peut-on dire de la solution au sens des moindres carrés de $Dx = (2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 3)^t$?