Université Claude Bernard Lyon 1
Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 7
MÉTHODES ITÉRATIVES, DÉCOMPOSITIONS DE MATRICES

Exercice 1. *(Convergence des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel)*
Examiner la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les deux matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *(Une comparaison des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel)*
Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres de A.
On pourra commencer par obtenir une valeur propre évidente en remarquant que la somme des éléments de chaque ligne de A est la même.
(2) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle symétrique définie positive ?
(3) Écrire la matrice d'itération $\mathcal{L}_J$ de Jacobi. Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi converge-t-elle ?
(4) Écrire la matrice d'itération $\mathcal{L}_{GS}$ de Gauss-Seidel.
(5) Pour $a > 0$, déterminer le rang de $\mathcal{L}_{GS}$.
(6) Montrer que pour $a \geq 4$, $\mathcal{L}_{GS}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle a une valeur propre réelle λ_1 telle que $|\lambda_1| \geq 2\sqrt{2}$.
(7) Montrer que pour $0 < a < 4$, $\mathcal{L}_{GS}$ admet une valeur propre complexe non réelle λ telle que $|\lambda| = \sqrt{a^3}$.
(8) En déduire les valeurs de $a > 0$ pour lesquelles la méthode de Gauss-Seidel converge.
(9) Pour $a \in]0, \frac{1}{2}[$, comparer les vitesses de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.

Exercice 3. (*Méthode de relaxation*)
On considère pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$, sa décomposition $A = D - E - F$ où D est diagonale, E est triangulaire inférieure stricte et F est triangulaire supérieure stricte.
Soit $\omega > 0$ un réel. On appelle méthode de relaxation de paramètre ω la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ avec $M = \dfrac{D}{w} - E$, $N = \dfrac{1-\omega}{\omega} D + F$. On note $\mathcal{J}_\omega$ sa matrice d'itération, i.e.

$$\mathcal{J}_\omega = (\frac{D}{w} - E)^{-1}(\frac{1-\omega}{\omega} D + F)$$

On vérifie que la méthode est bien définie ssi D est inversible, on fait donc cette hypothèse pour la suite de l'exercice. On a les cas suivants :

- $\omega = 1$: on retrouve la méthode de Gauss-Seidel ;
- $0 < \omega < 1$: on parle de sous-relaxation ;
- $\omega > 1$: on parle de sur-relaxation. C'est le choix qui est fait en général, on l'appelle la méthode SOR (*Successive over-relaxation*).

(1) Soit $(x^{(k)})$ la suite générée par la méthode de relaxation pour approcher, à partir de $x^{(0)}$, la solution du système $Ax = b$. Montrer que cette suite vérifie la propriété suivante : pour passer de $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$ on peut, de façon équivalente, introduire une variable intermédiaire $x^{(k+\frac{1}{2})}$ et résoudre le système

$$\begin{cases} Dx^{(k+\frac{1}{2})} = Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} + b & \text{(Gauss-Seidel modifié)} \\ x^{(k+1)} = \omega x^{(k+\frac{1}{2})} + (1-\omega)x^{(k)} & \text{(étape de "relaxation")} \end{cases}$$

(2) Montrer que $\rho(\mathcal{J}_\omega) \geq |1-\omega|$. En déduire que la condition $0 < \omega < 2$ est nécessaire pour que la méthode de relaxation converge.

(3) On suppose que A est hermitienne définie positive. Montrer que, dans ce cas, la méthode de relaxation converge si et seulement si $0 < \omega < 2$.

Exercice 4. (*Utilisation de la factorisation* LU)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 11 & 7 \\ 1 & 7 & 14 & 13 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer la factorisation LU de A.

(2) En déduire $\det(A)$.

(3) Résoudre à l'aide de la factorisation LU de A le système $Ax = b$ pour les choix suivants de $b \in \mathbb{R}^4$.

$$\text{(i)}\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}; \qquad \text{(ii)}\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(iii)}\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(iv)}\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. *(Factorisation de Cholesky)*

(1) Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$
est symétrique et définie positive.

(2) Calculer la factorisation de Cholesky de A.

(3) Résoudre $Ax = b$ avec $b = (0, 0, 96)^t$ en utilisant la deuxième question.

Exercice 6. *(Décomposition de Cholesky)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par
$$(A_n)_{i,j} = \min(i, j), \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(A_n) = 1$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est symétrique et définie positive.

(3) Échelonner les matrices A_2 et A_3. En déduire leur décomposition de Cholesky.

(4) Déterminer la décomposition de Cholesky de A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. *(Condition nécessaire et suffisante pour une décomposition* LU *sans permutation)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un résultat de cours indique que si tous les mineurs principaux de A sont non nuls, i.e.
$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \det((a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}) \neq 0$$
alors A admet une unique décomposition LU sans permutation. Montrer qu'il s'agit d'une équivalence.

Exercice 8. *(Décomposition* LU *et largeur de bande)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle largeur de bande de la matrice C la quantité
$$q_C = \max\{|i-j|,\ 1 \leq i, j \leq n,\ c_{i,j} \neq 0\}$$
Montrer que si C admet une décomposition LU sans permutation alors les largeurs de bande q_L et q_U de L et U vérifient $\max\{q_L,\ q_U\} \leq q_C$.

Exercice 9. *(Décomposition QR par la méthode de Householder)*
On s'intéresse à la décomposition QR d'une matrice réelle par l'algorithme de Householder qui utilise une succession de multiplications par des matrices orthogonales.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ sont identifiés à des vecteurs colonnes et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique. Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|^2 = u^t u$.

(1) À tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ on associe la matrice de Householder définie par

$$H(u) \;=\; \begin{cases} \mathrm{I}_n - 2\dfrac{uu^t}{\|u\|^2} & \text{si } u \neq 0 \\ \mathrm{I}_n & \text{sinon} \end{cases} .$$

(a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $H(u)$ est symétrique et othogonale.
$H(u)$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à u.

(b) Soit e un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, si v et e ne sont pas colinéaires, alors

$$H(v + \|v\|e)\, v = -\|v\|\, e \qquad \text{et} \qquad H(v - \|v\|e)\, v = \|v\|\, e.$$

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer une matrice de Householder H telle que la matrice HA n'ait que des zéros sous la diagonale dans sa première colonne.

(b) Construire une suite de matrices de Householder $(H^{(k)})_{1\leq k\leq n-1}$ et une suite de matrices $(A^{(k)})_{0\leq k\leq n-1}$ telles que

(i) $A^{(0)} = A$;

(ii) pour tout $0 \leq k \leq n-2$, $A^{(k+1)} = H^{(k+1)}A^{(k)}$;

(iii) $A^{(n-1)}$ est triangulaire.

(c) Montrer que l'algorithme précédent fournit une décomposition QR et que le nombre N_{op} de multiplications nécessaires à sa mise en œuvre vérifie $N_{op} \sim \dfrac{2n^3}{3}$.

(3) Application : déterminer une factorisation QR de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On va démontrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) Il existe une matrice unitaire U et une triangulaire supérieure T telles que $A = U\,T\,U^t$.

(ii) Le spectre de $A\overline{A}$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

(1) Montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$.

(2) Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}^+$ est une valeur propre de $A\overline{A}$. Soit $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $\alpha^2 = \lambda$. On pose $Y = A\overline{X} + \alpha X$. Montrer que $A\overline{Y} = \alpha Y$.

(3) Montrer que $(ii) \Rightarrow (i)$ par récurrence sur la taille des matrices.