Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 6 : NORMES DE MATRICES, CONDITIONNEMENT

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1. *(Norme de Frobenius)* La norme de Frobenius d'une matrice $A = (A_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2\right)^{1/2}.$$

(1) Montrer que la norme de Frobenius est une norme matricielle et qu'elle vérifie $\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^*A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(2) Montrer que la norme de Frobenius n'est pas une norme subordonnée.

(3) Montrer que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unitaire et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F.$$

(4) Montrer que si A est une matrice normale, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 2. *(Normes subordonnées $\|\!| \cdot |\!\|_\infty$ et $\|\!| \cdot |\!\|_1$)* On rappelle la définition des normes ℓ^∞ et ℓ^1 sur $\mathbb{K}^n \approx \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: pour tout $x = (x_1 \ \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
On note $\|\!| \cdot |\!\|_\infty$ et $\|\!| \cdot |\!\|_1$ les normes subordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|\!|A|\!\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \qquad \text{et} \qquad \|\!|A|\!\|_1 = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|\!|A|\!\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad \|\!|A|\!\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|.$$

Exercice 3. *(Norme subordonnée à la norme 2)*
On rappelle la définition du produit scalaire canonique sur $\mathbb{K}^n$ et de la norme associée :
pour tout $x = (x_1 \ \cdots, x_n), y = (y_1 \ \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$.
On note $\|\!| \cdot |\!\|_2$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\|\!|A|\!\|_2 = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrer que la norme 2 sur $\mathbb{K}^n$ est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ux\|_2 = \|x\|_2 = \|U^*x\|_2$.

(2) Montrer que la norme 2 subordonnée est invariante par transformation unitaire : si U est tel que $U^*U = \mathrm{I}_n$, alors

$$\|\!|A|\!\|_2 = \|\!|UA|\!\|_2 = \|\!|AU|\!\|_2 = \|\!|U^*AU|\!\|_2.$$

(3) Montrer que si A est une matrice normale, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.

(4) Montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\|A^*A\|_2}$.

(5) Montrer que
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2.$$

(6) *Conditionnement associé à la norme 2.*
On suppose A inversible et on considère la quantité $\mathrm{cond}_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$ appelée conditionnement de A associé à la norme 2. On note $0 < \mu_1(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A)$ les racines carrées ordonnées des valeurs propres de A^*A, i.e. les *valeurs singulières* de A.

(a) Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$.

(b) On suppose de plus que A est une matrice normale et on note $\sigma(A)$ son spectre.
Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}{\min_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|}$.

Exercice 4. *(Équivalence des normes et des conditionnements)*

(1) Montrer que si deux normes vectorielles $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|_\#$ vérifient $C_1\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq C_2\|\cdot\|_*$ pour un couple (C_1, C_2) de réels strictement positifs alors les normes subordonnées vérifient
$$\frac{C_1}{C_2}\|\cdot\|_* \leq \|\cdot\|_\# \leq \frac{C_2}{C_1}\|\cdot\|_*.$$

(2) En utilisant les formules démontrées aux exercices précédents, montrer les relations suivantes pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quand c'est possible, donner les inégalités associées pour les conditionnements.

(a) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_2$.

(b) $\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}| \leq \|A\|_2 \leq n\left(\max_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}|\right)$.

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$.

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1$.

(e) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty\|A\|_1}$.

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_p \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\,\|A\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$.

Exercice 5. *(Norme et inversibilité)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée associée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|Ax\| \geq \dfrac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$.

(2) Soit $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $\|E\| < \dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
$$\|Ax + Ex\| \geq \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|E\|\right)\|x\|.$$
En déduire que $A + E$ est inversible.

(3) Comment s'énonce le résultat qu'on vient de montrer si $A = I_n$?

Exercice 6. *(Interprétations du conditionnement)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.

(1) (a) Soit $b \in \mathbb{K}^n$ non nul et $\Delta b \in \mathbb{K}^n$. Soit $x, \Delta x \in \mathbb{K}^n$ définis par $Ax = b$ et $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$. Étant donné une norme subordonnée $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on rappelle que le conditionnement de A est défini par $\operatorname{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$. Montrer que
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \;\leq\; \operatorname{cond}(A)\,\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

(b) Déterminer deux vecteurs b et Δb tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

(c) Montrer de même que si $Ax = b$ et $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$, alors
$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \;\leq\; \operatorname{cond}(A)\,\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|},$$
puis que l'on peut trouver un vecteur b non nul, une matrice ΔA et un vecteur Δx vérifiant les relations ci-dessus et tels qu'on ait égalité entre les deux membres de l'inégalité précédente.

(2) (a) Montrer à l'aide de l'exercice précédent que, pour toute matrice singulière B, on a
$$\frac{1}{\operatorname{cond}(A)} \leq \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$

(b) Soit $u \in \mathbb{K}^n$ tel que $\|u\|_2 = 1$ et $\|A^{-1}u\|_2 = \|A^{-1}\|_2$. On pose $B_0 = A - \dfrac{u(A^{-1}u)^*}{\|A^{-1}\|_2^2}$.

Montrer que $\|A - B_0\|_2 = \dfrac{1}{\|A^{-1}\|_2}$ et en déduire que
$$\frac{1}{\operatorname{cond}_2(A)} = \min\left\{ \frac{\|A - B\|_2}{\|A\|_2} \;\middle|\; B \text{ singulière} \right\}.$$
Autrement dit, plus une matrice est mal conditionnée, plus elle est proche d'être singulière donc difficile à inverser numériquement, et réciproquement.

(3) *(Application : estimation du conditionnement)* On note pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit
$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}.$$

(a) Résoudre le système $A_\varepsilon x = b$ pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ puis pour $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+\varepsilon \end{pmatrix}$

(b) Donner à l'aide de la question (1) un minorant de $\operatorname{cond}_1(A_\varepsilon)$ et comparer à sa valeur exacte.