Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 4 : ESPACES EUCLIDIENS

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, dire si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel E. Si c'est le cas, préciser la norme associée et écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

(1) dans $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$), pour tout $P, Q \in E$,

(a) $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,dx$

(b) $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P'(x)Q'(x)\,dx$

(c) $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P'(x)Q'(x)\,dx$

(d) $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)\,e^{-x^2}\,dx$

(e) $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(k)Q(k)$

(f) $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$

(2) dans $E = M_n(\mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$), pour tout $A, B \in E$,

(a) $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$

(b) $\langle A, B \rangle = \det(A^t B)$

Exercice 2. Soit E un espace euclidien, A et B deux parties de E, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les propriétés suivantes :

(1) $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$

(2) $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$

(3) $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

(4) $F^\perp + G^\perp = (F \cap G)^\perp$

(5) $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 3. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est injectif et préserve l'orthogonalité : pour tout $x, y \in E$, si $\langle x, y \rangle = 0$ alors $\langle f(x), f(y) \rangle = 0$.

(1) Montrer que pour tout $i \neq j$, $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j) \rangle = 0$.

(2) En déduire que pour tout $i \neq j$, $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. On note λ cette valeur commune. Justifier que λ est non nul.

(3) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \lambda \|x\|$. *On dit que f est une similitude.*

Exercice 4.
On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire suivant : pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,dx$.
À partir de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 5.

(1) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est symétrique.

(2) *Un exemple.* Montrer que la matrice $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur orthogonal p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Préciser le noyau et l'image de p.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.

(1) Montrer que $(\operatorname{Ker} A)^\perp = \operatorname{Im}(A^t)$ et $(\operatorname{Im} A)^\perp = \operatorname{Ker}(A^t)$.

(2) Montrer que A et A^t ont même rang.

(3) Montrer que $\operatorname{Ker}(A^t A) = \operatorname{Ker} A$.

(4) Montrer que $\operatorname{Im}(A^t A) = \operatorname{Im}(A^t)$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique et de la norme associée. On considère le sous-espace vectoriel

$$G = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ et } x_3 + x_4 = 0\}$$

(1) Déterminer la dimension et une base orthonormée de G.

(2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, donner une expression explicite de la distance de x à G, définie par

$$d(x, G) = \inf\{\|x - y\|,\, y \in G\}.$$

Exercice 8. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(M, N) \in E^2 \mapsto \langle M, N \rangle = \operatorname{tr}(M^t N)$. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;;\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Déterminer une base orthonormée de F.

(2) Calculer le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 9. On veut calculer la quantité suivante, en s'assurant d'abord qu'elle est bien définie :

$$\delta = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 \left(x^2 - ax - b\right)^2 \, dx\,.$$

(1) Déterminer un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un sous-espace vectoriel F et un élément u de E tels que $\delta = d(u, F)^2$ où $d(u, F) = \inf\{\|u - v\|,\, v \in F\}$.

(2) Calculer δ.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer qu'il existe un unique $H_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 H_n(x) P(x) \, dx = P'(1)$$

(2) Calculer H_2.

Exercice 11. Soit E un espace euclidien de dimension n muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Soit $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes symétriques de E tels que

- $\operatorname{rg} u_1 + \ldots + \operatorname{rg} u_p = n$
- pour tout $x \in E$, $\langle u_1(x), x\rangle + \ldots + \langle u_p(x), x\rangle = \langle x, x\rangle$.

(1) Montrer que $E = \operatorname{Im} u_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} u_p$.
(2) Montrer que, pour tout $k = 1, \ldots, p$, u_k est un projecteur orthogonal.
(3) Montre que les $\operatorname{Im} u_k$ sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 12. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

(1) Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
(2) Si p n'est pas un projecteur orthogonal, construire un $x_0 \in E$ tel que $\|p(x_0)\| > \|x_0\|$.

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la fonction suivante :

$$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle Ax, x\rangle$$

(1) (a) On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices antisymétriques.
Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et écrire la décomposition correspondante de toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note S_A sa partie symétrique. Montrer que $f_A = f_{S_A}$.

(2) Dans la suite de l'exercice, on fixe A une matrice symétrique.
(a) Montrer que f_A est bornée sur S et atteint ses bornes sur S.
(b) On note λ_{min} et λ_{max} la plus petite et la plus grande valeur propre de A. Montrer que

$$\lambda_{min} = \min_{x \in S} f_A(x) \quad \text{et} \quad \lambda_{max} = \max_{x \in S} f_A(x)$$

(3) Dans cette question, on suppose de plus que A est définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle Ax, x\rangle > 0$.
(a) Montrer que $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f_A(x) = +\infty$.
(b) On note $\Sigma_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_A(x) = 1\}$. Montrer que Σ_A est non vide, fermé et borné dans $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$.

(4) *Une application.* On définit $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_nx_1$ et on note $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \text{ et } x_1 + \ldots + x_n = 0\}$.
(a) Soit M la matrice dont les coefficients $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\ldots$, $(n-1, n)$, $(n, 1)$ valent 1 et les autres valent 0. Montrer que $h = f_M$, que $M^n = I_n$ et que $M^t = M^{n-1} = M^{-1}$.
(b) Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et calculer ses valeurs propres. On note $(v_1, \ldots, v_n)$ une base (dans $\mathbb{C}^n$) de vecteurs propres de M.
(c) Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, n$, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ obtenu en prenant la partie réelle de v_k est un vecteur propre de $\frac{M+M^t}{2}$, et donner la valeur propre associée.
(d) Montrer que h est majorée sur V, qu'elle atteint son maximum sur V et calculer ce maximum.