Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

FEUILLE D'EXERCICES 2 : FORMES BILINÉAIRES, FORMES QUADRATIQUES (I)

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique. On considère les formes bilinéaires suivantes : pour tout $x = (x_1, x_2)$, tout $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$,

- $\phi_1(x, y) = x_1 y_2$;
- $\phi_2(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$;
- $\phi_3(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$;
- $\phi_4(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$.

(1) Vérifier que ϕ_1 est bien une forme bilinéaire.
(2) Écrire la matrice dans la base canonique des quatre formes bilinéaires ci-dessus et calculer leur rang.
(3) Pour celles qui sont symétriques, déterminer leur noyau et leur cône isotrope.

Exercice 2. Soit la forme bilinéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie dans la base canonique par : pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, tout $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 6x_1 y_3 + 2x_2 y_1 - 3x_2 y_3 + 3x_3 y_1 + x_3 y_2.$$

(1) Écrire la matrice de φ dans la base canonique. Calculer son rang.
(2) Calculer $\varphi(z, w)$, où $z = (2, -1, 0)$ et $w = (5, 15, 1)$.
(3) Écrire la matrice de φ dans la base (v_1, v_2, v_3), où $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 3. On considère les formes quadratiques suivantes :

(1) $Q_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + xz$;
(2) $Q_1 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + 2ixy - 2ixz + 2y^2 + 2yz - z^2$;
(3) $Q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xy + 3xz$.

Pour chacune d'elles, déterminer sa forme polaire, la matrice associée, son rang et son noyau.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit f une forme bilinéaire symétrique sur E telle que 0 soit le seul élément isotrope pour f (c'est-à-dire le seul vecteur x vérifiant $f(x, x) = 0$). Soit u une application de E dans E vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad f\big(u(x), u(y)\big) = f(x, y).$$

Montrer que u est linéaire et injective.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ non tous nuls et u la forme linéaire E définie par :

$$u(e_i) = \alpha_i \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, n.$$

On considère $b : E \times E \to \mathbb{K}$ définie par $b(x, y) = u(x)u(y)$.

(1) Montrer que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.

(2) Quelle est la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$? Quel est le rang de b ?

(3) Déterminer l'orthogonal de E (pour b).

Exercice 6. Soit E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de E et F respectivement. On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. L'application transposée de u est définie comme l'application linéaire

$$u^t : \begin{array}{rcl} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ u \end{array}$$

Comment peut-on caractériser cette application transposée à l'aide des crochets de dualité ? Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*\mathcal{C}^*}(u^t) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(u))^t.$$

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On note $\mathrm{Bil}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E. On définit

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Bil}(E) & \longrightarrow & L(E, E^*) \\ B & \longmapsto & \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ v & \longmapsto & (x \longmapsto B(x, v)) \end{array} \right) \end{array}$$

(1) Justifier que ψ est bien définie.

(2) Montrer que ψ est une application linéaire inversible.

(3) Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*\mathcal{B}}(\psi(B))$$

pour tout $B \in \mathrm{Bil}(E)$.

(4) Soit $\mathcal{C}$ une autre base de E. Déduire des questions précédentes que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(B) = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathrm{Id}))^t \,.\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B) \,.\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$$