FEUILLE D'EXERCICES 1 : DUALITÉ EN DIMENSION FINIE

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans les exercices qui suivent.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$, où

$$e_1 = (1,1,1), \quad e_2 = (1,0,-1), \quad e_3 = (0,1,1).$$

Déterminer la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ duale de $\mathcal{B}$.

Exercice 2. On considère f_1, f_2, f_3 les formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$ définies par

$$\text{pour tout } v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} f_1(v) &= x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 \\ f_2(v) &= x_1 + 2x_2 - x_4 \\ f_3(v) &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{cases}$$

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille libre de $(\mathbb{R}^4)^*$.

Exercice 3.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel de E. On définit
$$G_F = \{\varphi \in E^* \mid \forall v \in F \ \varphi(v) = 0\}$$
Montrer que G_F est un sous-espace vectoriel de E^* et déterminer sa dimension en fonction de celle de F.

(2) *Application.* Soit $E = \mathbb{R}^5$. On considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,3,-2,2,3)$, $\quad v_2 = (1,4,-3,4,2)$, $\quad v_3 = (2,3,-1,-2,9)$.

  (a) Déterminer la dimension de F. Quelle est la dimension de G_F ?

  (b) Déterminer une base de G_F.

Exercice 4. Espace des polynômes
Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $E = \mathbb{K}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$.

(1) *Préliminaire.* Soit E un espace vectoriel de dimension finie, φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E. Montrer que φ et ψ sont proportionnelles si et seulement si $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.

(2) *Des bases de E et E^*.*

  (a) Soit $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. On définit pour tout $i = 0, \dots, n$, $f_i \colon E \to \mathbb{K},\ P \mapsto P(\alpha_i)$.
  Justifier que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* et déterminer sa base antéduale.

  (b) On note pour tout $k = 0, \dots, n$, $Q_k = \dfrac{(X-a)^k}{k!}$.

    (i) Justifier que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de E et exprimer tout élément P de E dans cette base.

    (ii) Déterminer la base duale de $(Q_0, \dots, Q_n)$.

(3) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X-a)P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

(4) Soit $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi((X-a)^2P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Que peut-on dire de φ ?

(5) Pour $i = 0, \dots, n$, on définit $f_i \colon E \to \mathbb{K},\ P \mapsto f_i(P) = P'(i)$.
Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une famille liée de E^*. Quel est son rang ?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et f, $f_1, \ldots, f_p \in E^*$.

(1) On suppose d'abord que la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre. Montrer que f est combinaison linéaire des $(f_i)_{1 \leq i \leq p}$ si et seulement si $\operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} f_p$.

(2) Montrer que le résultat est encore vrai pour une famille quelconque $(f_1, \ldots, f_p)$.

Exercice 6. Bases duales.
Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathcal{B}$.

(1) Dans les trois cas suivants, justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de E et déterminer sa base duale $\mathcal{B}'^*$:

  (a) $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3, e_4, \ldots, e_n)$;

  (b) $\mathcal{B}' = (\lambda e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$;

  (c) $\mathcal{B}' = (e_1 + \lambda e_2, e_2, e_3, \ldots, e_n)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

(2) Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_{n-1})$ une famille libre de E et $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse compléter $\mathcal{F}$ en une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E de sorte que $\varphi = f_n^*$.

Exercice 7. Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) On note $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de E. Vérifier que pour tout $i, j, k, l = 1, \ldots, n$, on a $E_{ij} E_{kl} = \delta_j^k E_{il}$.

(2) Montrer que pour toute forme linéaire φ sur E, il existe une unique matrice M telle que

$$\forall A \in E \qquad \varphi(A) = \operatorname{tr}(MA).$$

Exprimer les coefficients de M en fonction de φ.

(3) Montrer que la trace est l'unique forme linéaire φ sur E vérifiant les deux propriétés suivantes :
— $\varphi(I_n) = n$;
— $\forall A, B \in E \quad \varphi(AB) = \varphi(BA)$.

(4) On dit qu'une matrice $M \in E$ est un *commutateur* s'il existe A et B dans E tels que $M = AB - BA$. Déterminer le sous-espace vectoriel de E engendré par les commutateurs.

(5) (*question très difficile*) Montrer que l'ensemble des commutateurs est un sous-espace vectoriel de E.