

CONTRÔLE TERMINAL
JEUDI 11 JANVIER 2024 – DURÉE : 2H

Aucun document n'est autorisé.

Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées clairement et soigneusement.

Le sujet comporte 5 exercices.

Exercice 1. (Questions de cours)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A .
 - (a) Donner la définition de la norme subordonnée $\|A\|_\infty$.
 - (b) Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$.
 - (c) Montrer que $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|$.
- (2) On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $(\mathbb{C}_n[X])^2$ définie pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ par

$$\langle P, Q \rangle = \overline{P}(0)Q(0) + \int_0^1 \overline{P}'(x)Q'(x)dx$$

Montrer que cette application est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 2.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{C}^n$. On veut résoudre dans \mathbb{C}^n par une méthode itérative le système linéaire $Ax = b$.

On note D la matrice diagonale formée à partir de la diagonale de A et on fixe $\alpha \neq 0$. On suppose que D est inversible et on considère la méthode itérative suivante : pour $x_0 \in \mathbb{C}^n$ donné, on définit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b$$

- (1) Montrer que la méthode de Jacobi correspond au choix $\alpha = 1$.
- (2) Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A .
- (3) On suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et que A est à diagonale strictement dominante, i.e.

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- (a) Justifier que la méthode itérative est bien définie avec cette hypothèse sur A .
- (b) On note x la solution de $Ax = b$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$x_{k+1} - x = (I - \alpha D^{-1}A)(x_k - x).$$
- (c) Montrer que $\|I - \alpha D^{-1}A\|_\infty < 1$, où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme subordonnée ∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- (d) Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x .

Exercice 3. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$ et le vecteur $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 39 \end{pmatrix}$.

- (1) Justifier que B admet une factorisation LU (sans permutation).
- (2) Déterminer la factorisation LU de B par la méthode de Gauss en justifiant les calculs effectués.
- (3) Utiliser la factorisation LU de B (en détaillant les calculs) pour résoudre le système $Bx = v$.

Exercice 4.

- (1) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de rang p . Montrer que la matrice $A^t A$ est symétrique et définie positive.

Dans la suite, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (2) L'équation $Ax = b$ admet-elle une solution exacte dans \mathbb{R}^2 ?
- (3) On veut résoudre l'équation $Ax = b$ au sens des moindres carrés (pour la norme euclidienne classique sur \mathbb{R}^3).
 - (a) Écrire l'équation normale associée au problème.
 - (b) Justifier que l'équation normale possède une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}^2$.
 - (c) Déterminer x_0 .
- (4) On note $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par (u_1, u_2) .
 - (a) Donner la définition de la distance de b à F , notée d .
 - (b) Calculer d .

Exercice 5. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . Soit q la forme quadratique qui à tout vecteur $v \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans e associe

$$q(v) = x^2 + 2xy - 4xz - 8yz - 3z^2.$$

- (1) Déterminer la forme polaire φ_q associée à q .
- (2) Donner la définition de la matrice M_e de q relativement à la base e , puis calculer M_e .
- (3) Écrire q comme la somme de carrés de formes linéaires indépendantes en utilisant la réduction de Gauss.
- (4) Déterminer la signature et le rang de q . La forme quadratique est-elle dégénérée ?
- (5) À l'aide des formes linéaires déterminées à la question (3), construire une base de l'espace dual E^* de E .
- (6) Déterminer une base $a = (a_1, a_2, a_3)$ de E orthogonale pour q .
- (7) Quelle est la matrice M_a de q dans la base a ?
- (8) Justifier que $M_e = P^t M_a P$ où P est une matrice que l'on explicitera. Que peut-on dire de la signature et du rang de M_a (justifier) ?