Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE TERMINAL
JEUDI 11 JANVIER 2024 – DURÉE : 2H

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées clairement et soigneusement.

Le sujet comporte 5 exercices.

Exercice 1. (Questions de cours)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A.
  (a) Donner la définition de la norme subordonnée $|||A|||_\infty$.
  (b) Montrer que $\rho(A) \leq |||A|||_\infty$.
  (c) Montrer que $|||A|||_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |A_{i,j}|$.

(2) On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $(\mathbb{C}_n[X])^2$ définie pour tous $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ par
$$\langle P, Q \rangle = \overline{P}(0)Q(0) + \int_0^1 \overline{P'}(x)Q'(x)dx$$
Montrer que cette application est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 2.
Soit $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible et $b \in \mathbb{C}^n$. On veut résoudre dans $\mathbb{C}^n$ par une méthode itérative le système linéaire $Ax = b$.
On note D la matrice diagonale formée à partir de la diagonale de A et on fixe $\alpha \neq 0$. On suppose que D est inversible et on considère la méthode itérative suivante : pour $x_0 \in \mathbb{C}^n$ donné, on définit la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b$$

(1) Montrer que la méthode de Jacobi correspond au choix $\alpha = 1$.
(2) Exprimer les coefficients de la matrice $D^{-1}A$ en fonction de ceux de A.
(3) On suppose que $0 < \alpha \leq 1$ et que A est à diagonale strictement dominante, i.e.
$$\forall i = 1, \ldots, n, \qquad |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$
  (a) Justifier que la méthode itérative est bien définie avec cette hypothèse sur A.
  (b) On note x la solution de $Ax = b$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
  $x_{k+1} - x = (I - \alpha D^{-1}A)(x_k - x)$.
  (c) Montrer que $|||I - \alpha D^{-1}A|||_\infty < 1$, où $|||\cdot|||_\infty$ désigne la norme subordonnée ∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  (d) Montrer que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x.

Exercice 3. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$ et le vecteur $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 39 \end{pmatrix}$.

(1) Justifier que B admet une factorisation LU (sans permutation).

(2) Déterminer la factorisation LU de B par la méthode de Gauss en justifiant les calculs effectués.

(3) Utiliser la factorisation LU de B (en détaillant les calculs) pour résoudre le système $Bx = v$.

Exercice 4.

(1) Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq p$, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice de rang p. Montrer que la matrice $A^t A$ est symétrique et définie positive.

Dans la suite, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) L'équation $Ax = b$ admet-elle une solution exacte dans $\mathbb{R}^2$?

(3) On veut résoudre l'équation $Ax = b$ au sens des moindres carrés (pour la norme euclidienne classique sur $\mathbb{R}^3$).

(a) Écrire l'équation normale associée au problème.

(b) Justifier que l'équation normale possède une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

(c) Déterminer x_0.

(4) On note $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par (u_1, u_2).

(a) Donner la définition de la distance de b à F, notée d.

(b) Calculer d.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit q la forme quadratique qui à tout vecteur $v \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans e associe

$$q(v) = x^2 + 2xy - 4xz - 8yz - 3z^2.$$

(1) Déterminer la forme polaire φ_q associée à q.

(2) Donner la définition de la matrice M_e de q relativement à la base e, puis calculer M_e.

(3) Écrire q comme la somme de carrés de formes linéaires indépendantes en utilisant la réduction de Gauss.

(4) Déterminer la signature et le rang de q. La forme quadratique est-elle dégénérée ?

(5) À l'aide des formes linéaires déterminées à la question (3), construire une base de l'espace dual E^* de E.

(6) Déterminer une base $a = (a_1, a_2, a_3)$ de E orthogonale pour q.

(7) Quelle est la matrice M_a de q dans la base a ?

(8) Justifier que $M_e = P^t M_a P$ où P est une matrice orthogonale que l'on explicitera. Que peut-on dire de la signature et du rang de M_a (justifier) ?