Contrôle terminal — 11/01/24
Corrigé

Exercice 1

(1) (a) Par définition $|||A|||_\infty = \sup_{\substack{x\in\mathbb{C}^n \\ x\neq 0}} \dfrac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$

où pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

(b) Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres de A et $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs propres associés.

Soit k tel que $\rho(A)=|\lambda_k|$

On a $\dfrac{\|Ax_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} = \dfrac{\|\lambda_k x_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} = |\lambda_k|$

Or $\dfrac{\|Ax_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} \leq |||A|||_\infty$

donc $\rho(A) \leq |||A|||_\infty$

(c) Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \qquad i=1,\dots,n$$

$$\|Ax\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |(Ax)_i|$$
$$= \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left|\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j\right|$$
$$\leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^n |A_{ij}||x_j|$$

$$\leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| \, \|x\|_\infty$$

$$= \|x\|_\infty \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

d'où, si $x \neq 0$,

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

Soit i_0 tel que $\max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}|$

On considère le vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$ tel que

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } A_{i_0 j} = 0 \\ \dfrac{\overline{A_{i_0 j}}}{|A_{i_0 j}|} & \text{si } A_{i_0 j} \neq 0 \end{cases}$$

On a $(Ay)_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}|$

donc $\|Ay\|_\infty \geq \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}|$

On a aussi $\|y\|_\infty = 1$

d'où $\dfrac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} \geq \sum_{j=1}^{n} |A_{i_0 j}|$

On en déduit que
$$\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \geqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$$

<u>Conclusion</u> : $|||A|||_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|$

(2) $x \longmapsto P(x)$ et $x \longmapsto Q(x)$ avec $P, Q \in \mathbb{C}_n[X]$ sont des fonctions polynomiales donc elles sont dérivables sur $\mathbb{C}$ et leurs dérivées sont également polynomiales.

On en déduit que $x \longmapsto \overline{P'(x)}\,Q(x)$ est intégrable sur $[0,1]$ et $\int_0^1 \overline{P'}(x) Q(x)\,dx \in \mathbb{C}$. On a aussi $\overline{P}(0)Q(0) \in \mathbb{C}$

donc $\langle P, Q\rangle = \overline{P}(0)Q(0) + \int_0^1 \overline{P}'(x) Q'(x)\,dx \in \mathbb{C}$

Pour tous $P, Q, R \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ On a

$$\langle \lambda P, Q\rangle = \overline{\lambda}\,\overline{P}(0)Q(0) + \overline{\lambda}\int_0^1 \overline{P}'(x) Q'(x)\,dx$$
$$= \overline{\lambda}\langle P, Q\rangle$$

et $\langle P+Q, R\rangle = \langle P, R\rangle + \langle Q, R\rangle$ donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est antilinéaire à gauche.

En outre $\langle Q, P\rangle = \overline{Q}(0)P(0) + \int_0^1 \overline{Q'(x)}\, P'(x)\,dx$
$$= \overline{\overline{P}(0)Q(0)} + \overline{\int_0^1 \overline{P'(x)}\, Q'(x)\,dx}$$
$$= \overline{\langle P, Q\rangle}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est à symétrie hermitienne

En particulier $\langle P, P\rangle = \overline{\langle P, P\rangle} \in \mathbb{R}$

Comme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est antilinéaire à gauche et à symétrie hermitienne, elle est linéaire à droite. C'est donc une forme sesquilinéaire.

Pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$

$$<P,P> = |P(0)|^2 + \int_0^1 |P'(x)|^2 dx$$

donc $<P,P> \in \mathbb{R}^+$

En outre $<P,P> = 0$

$\Longleftrightarrow$ $P(0) = 0$

et $\int_0^1 |P'(x)|^2 dx = 0$

P étant un polynôme

$\int_0^1 |P'(x)|^2 dx = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [0,1]$
$P'(x) = 0$

donc

$<P,P> = 0 \Longleftrightarrow P(0) = 0$ et
$\forall x \in [0,1]\ P'(x) = 0$

$\Longleftrightarrow$ P est un polynôme constant s'annulant en 0

$\Longleftrightarrow$ P est le polynôme nul

On en déduit que $<\cdot,\cdot>$ est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

C'est donc un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}_n[X]$

Exercice 2

(1) Dans le cas $\alpha = 1$ la méthode itérative s'écrit

x_0 donné

$\forall k \in \mathbb{N} \quad x_{k+1} = (I - D^{-1}A)x_k + D^{-1}b$

La méthode de Jacobi découle de la décomposition

$A = M - N$ avec $M = D$

et $N = M - A$
$= D - A$

et la méthode itérative associée est

y_0 donné

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= M^{-1}N y_k + M^{-1}b \\
&= D^{-1}(D-A)y_k + D^{-1}b \\
&= (I - D^{-1}A)y_k + D^{-1}b
\end{aligned}
$$

Le cas $\alpha = 1$ correspond donc bien à la méthode de Jacobi

(2) D est inversible par hypothèse. On a

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

donc $$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

d'où $D^{-1}A =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & \frac{a_{22}}{a_{22}} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & & \frac{a_{nn}}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

donc $(D^{-1}A)_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right)_{i,j=1\ldots n}$

(3) (a) Si A est à diagonale strictement dominante alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geq 0$$

donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $|a_{ii}| > 0$

On en déduit que D est inversible donc la méthode itérative est bien définie.

(b) On a

$$(I - \alpha D^{-1} A)(x_k - x)$$
$$= (I - \alpha D^{-1} A) x_k - x + \alpha D^{-1} A x$$
$$= x_{k+1} - \alpha D^{-1} b - x + \alpha D^{-1} A x$$

Or $Ax = b$ donc $D^{-1} A x = D^{-1} b$

d'où $(I - \alpha D^{-1} A)(x_k - x) = x_{k+1} - x$

(c) D'après la question (2)

$$I-\alpha D^{-1}A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & -\alpha\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\alpha\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\alpha\frac{a_{21}}{a_{22}} & 1-\alpha & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ -\alpha\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\alpha\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

D'après l'exercice 1

$$|||I-\alpha D^{-1}A|||_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]}\left(|1-\alpha| + \sum_{j\neq i} \frac{|\alpha||a_{ij}|}{|a_{ii}|}\right)$$

Or $\forall i \quad |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$

donc pour tout i

$$|1-\alpha| + |\alpha| \frac{\sum |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < |1-\alpha| + |\alpha|$$

Comme $\alpha \in [0,1[$ on a

$$|1-\alpha| + |\alpha| = 1-\alpha+\alpha = 1$$

d'où, pour tout i,

$$|1-\alpha| + |\alpha| \sum_{i\neq j} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

On en déduit que

$$|||I-\alpha D^{-1}A|||_\infty < 1$$

(d) Comme $|||\cdot|||_\infty$ est une norme matricielle on a par théorème $\rho(I-\alpha D^{-1}A)$

$$\leq |||I-\alpha D^{-1}A|||_\infty < 1$$

La méthode itérative est de la forme

$$x_{k+1} = M^{-1}N x_k + M^{-1}b$$

avec $M^{-1} = \alpha D^{-1}$

$$M = \frac{1}{\alpha} D \quad (\alpha \neq 0)$$

$$N = M - A = \frac{1}{\alpha} D - A$$

$$M^{-1}N = I - \alpha D^{-1}A$$

Par un théorème du cours la condition $\rho(M^{-1}N) < 1$ garantit la convergence de la méthode itérative vers la solution x de $Ax = b$

Exercice 3

(1) Les déterminants mineurs principaux sont

$1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4,$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - L_2 \end{matrix}$$

$$= 4 \times 9 = 36$$

Ces déterminants sont non nuls donc B admet une unique factorisation LU sans permutation

(2) On a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}]{} B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

ce qui équivaut à multiplier B à gauche par

11

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis on calcule

$$B_1 \xrightarrow[L_3 - L_2]{} B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$B_2 = L_2 B_1 \text{ avec } L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

B_2 est triangulaire supérieure, c'est donc la matrice U de la factorisation LU de B

On a $L_2 L_1 B = U$

donc $B = L_1^{-1} L_2^{-1} U$

Or $L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$L_1^{-1}L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On identifie $L = L_1^{-1}L_2^{-1}$ et on conclut que $B = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

(3) $Bx = v \Leftrightarrow LUx = v$

On résout d'abord $Ly = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 39 \end{pmatrix}$

On obtient $y_1 = 4$

$y_1 + y_2 = 12$ donc $y_2 = 8$

$y_1 + y_2 + y_3 = 39$ donc $y_3 = 27$

puis on résout $Ux = y$

On a $9x_3 = 27$ donc $x_3 = 3$

$4x_2 + 4x_3 = 8$ donc $x_2 = -1$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$ donc $x_1 = 2$

La solution du système $Ax = b$ est donc $(2, -1, 3)$

Exercice 4

(1) $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$

donc A^tA est symétrique

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x = (x_1, x_2)$ est solution de $Ax = b$ ssi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 & (1) \\ x_1 + x_2 = 1 & (2) \\ -x_1 = 2 & (3) \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow x_1 = -2$

(1) $\Rightarrow x_2 = 5$ (2) $\Rightarrow x_2 = 3$

L'équation $Ax = b$ n'admet donc aucune solution, i.e $b \notin \mathrm{Im}\, A$

(3) (a) L'équation normale associée au problème est $A^tAx = A^tb$ (14)

On a
$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
et
$$A^tb = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b) On remarque que $\det(A^tA) = 3$ donc l'équation normale admet une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}^2$

(c) $x_0 = (a, b)$ est solution de l'équation normale ssi
$$\begin{cases} 6a + 3b = 1 & (1) \\ 3a + 2b = 2 & (2) \end{cases}$$
$(1) - 2(2)$ donne $-b = -3$ donc $b = 3$

d'où $a = -\frac{4}{3}$

$x_0 = \left(-\frac{4}{3}, 3\right)$

(d) x_0 est l'unique solution de $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$

donc $Ax_0 = P_{\operatorname{Im} A}(b)$

où $P_{\operatorname{Im} A}$ désigne la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} A$

(4) (a) $d = \text{dist}(b, F) = \inf\limits_{y \in F} \|y - b\|$

(b) $F = \text{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$= \{Ax,\ x \in \mathbb{R}^2\}$

$= \operatorname{Im} A$

donc $\text{dist}(b, F) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|$

$= \|A x_0 - b\|$

$= \left\| \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\|$

$= \left\| \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\|$

$= \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3} \left\| \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix} \right\|$

$= \frac{2}{3} \left\| \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\|$

donc $d = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 5

(1) Pour tout $v=(x,y,z)$ et $w=(x',y',z')$ dans e

$$\varphi_q(v,w) = xx' + xy' + x'y - 2x'z - 2xz' - 4yz' - 4y'z - 3zz'$$

(2) $M_e = (\varphi_q(e_i, e_j))_{i,j=1,2,3}$

Les coefficients de M_e peuvent donc être lus dans l'expression de φ_q

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(3) $q(v) = x^2 + 2xy - 4xz - 8yz - 3z^2$

$= (x+y-2z)^2 - y^2 - 4z^2 + 4yz - 8yz - 3z^2$

$= (x+y-2z)^2 - y^2 - 4yz - 7z^2$

$= (x+y-2z)^2 - (y+2z)^2 + 4z^2 - 7z^2$

$= (x+y-2z)^2 - (y+2z)^2 - 3z^2$

Par construction $l_1^* : (x,y,z) \mapsto x+y-2z$, $l_2^* : (x,y,z) \mapsto y+2z$, $l_3^* : (x,y,z) \mapsto z$ sont des formes linéaires indépendantes

$= (x+y-2z)^2 - (y+2z)^2 - 3z^2$

(4) Par le théorème de Sylvester

signature$(q) = (1,2)$

et rang$(q) = 1+2 = 3$ donc $\ker(q) = \{0\}$

q n'est pas dégénérée

(5) On considère les formes linéaires sur E définies pour $v=(x,y,z)$ dans e

par $l_1^*(v) = x+y-2z$

$l_2^*(v) = y+2z$

$l_3^*(v) = z$

Par construction, (l_1^*, l_2^*, l_3^*) forme une base du dual E^* (qui est de dimension 3)

(6) On sait d'après un résultat de cours que la base antéduale de (l_1^*, l_2^*, l_3^*) est une base orthogonale de E.

Notons-la (a_1, a_2, a_3).

Soit Q la matrice dont les lignes sont les coordonnées de l_1^*, l_2^*, l_3^* dans la base duale de e

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Par propriété de la base antéduale, les colonnes de Q^{-1} sont les coordonnées de a_1, a_2, a_3 dans e

Calculons Q^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 + 4L_3 \\ L_2 - 2L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

donc $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les coordonnées dans e des vecteurs de la base antéduale sont
$a_1 = (1, 0, 0)$, $a_2 = (-1, 1, 0)$, $a_3 = (4, -2, 1)$

(7) Par un résultat de cours la matrice M_a de q dans a est $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ 18

En effet
$$q(v) = (l_1^*(v))^2 - (l_2^*(v))^2 - 3(l_3^*(v))^2$$
donc $\varphi_q(v, w) = l_1^*(v)\, l_1^*(w) - l_2^*(v)\, l_2^*(w) - 3\, l_3^*(v)\, l_3^*(w)$

$$M_a = (\varphi_q(a_i, a_j))_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$
puisque $l_i^*(a_j) = \delta_i^j$

(8) Par la formule de changement de base pour les matrices associées à des formes bilinéaires, on a

$$M_e = P^t M_a P$$
avec $P = \mathrm{Mat}_{a,e}(Id)$

Or $Q^{-1} = \mathrm{Mat}_{e,a}(Id) = P^{-1}$

donc $P = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q est q-orthogonale donc P est q-orthogonale

On a ~~finalement~~

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} M_a \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices M_e et M_a sont congruentes. Or la signature et le rang sont des invariants de congruence

donc signature(M_a) = signature(M_e) $= (1,2)$

rang(M_a) = rang$(M_e) = 3$