Université Lyon I
Département de Mathématiques

Année universitaire 2023-2024
L3 Mathématiques générales et applications
Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE TERMINAL, SECONDE SESSION
VENDREDI 21 JUIN 2024 – DURÉE : 1H30

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées clairement et soigneusement.
Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère l'application $q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)P''(x)dx \end{array}$

(1) Justifier que la définition de $q(P)$ a un sens pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer qu'il existe une forme bilinéaire symétrique $s : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $s(P,P) = q(P)$. On en déduit que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}[X]$. Que représente s pour q ? Est-elle unique (justifier) ?

On se restreint maintenant aux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et, par abus de langage, on note encore

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)P''(x)dx \end{array}$$

(3) Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$. Exprimer $q(P)$.

(4) Déterminer la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quel est son rang ?

(5) À l'aide de la réduction de Gauss, exprimer q comme combinaison de carrés de formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}_2[X]$ qu'on définira explicitement.

(6) Quelle est la signature de q ?

(7) Déterminer le noyau et les vecteurs isotropes de q.

(8) Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonale pour q.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on suppose que A est inversible. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\det(AB - \lambda\mathrm{I}) = \det(BA - \lambda\mathrm{I})$.

(2) En déduire que les rayons spectraux des deux matrices AB et BA sont identiques.

(3) Rappeler la définition de la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|A^t\|_2 = \|A\|_2$.

(4) Rappeler la définition du conditionnement cond_2 associé à la norme subordonnée $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que $\mathrm{cond}_2(A) = \mathrm{cond}_2(A^t)$.

(5) On note $\|\cdot\|_1$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$. A-t-on $\|A^t\|_1 = \|A\|_1$?

(6) Montrer que, si $n = 2$, on a $\mathrm{cond}_1(A) = \mathrm{cond}_1(A^t)$ pour tout $A \in M_2(\mathbb{R})$ inversible.

(7) Calculer $\mathrm{cond}_1(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Soit E un espace hermitien. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens (c'est-à-dire autoadjoints) de E, et $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des endomorphismes hermitiens de E dont les valeurs propres sont dans $\mathbb{R}^+$.

(1) Soit f un élément de $\mathcal{H}$. Quelles propriétés de f sont énoncées dans le théorème spectral ?

(2) On veut montrer que si f est un endomorphisme de E alors
$$f \in \mathcal{H} \iff \forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle \in \mathbb{R}.$$

(a) Montrer que si $f \in \mathcal{H}$ alors, pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \in \mathbb{R}$.

(b) Réciproquement, on suppose que $\langle f(x), x\rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $y, z \in E$. Développer $\langle f(y+z), y+z\rangle$ et $\langle f(y+iz), y+iz\rangle$. En déduire que
$$\langle f(y), z\rangle + \langle f(z), y\rangle \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \langle f(y), z\rangle - \langle f(z), y\rangle \in i\mathbb{R}$$

(c) En déduire que
$$\begin{cases} \langle f(z), y\rangle + \langle f(y), z\rangle & = & \langle y, f(z)\rangle + \langle z, f(y)\rangle \\ \langle f(z), y\rangle - \langle f(y), z\rangle & = & -\langle y, f(z)\rangle + \langle z, f(y)\rangle \end{cases}$$
et conclure que $f \in \mathcal{H}$.

(3) On veut montrer maintenant que si f est un endomorphisme de E alors
$$f \in \mathcal{H}^+ \iff \forall x \in E,\ \langle f(x), x\rangle \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Montrer que si $f \in \mathcal{H}$ alors, pour tout $x \in E$, $\langle f(x), x\rangle \in \mathbb{R}^+$ (on pourra utiliser une décomposition de x dans une base bien choisie de E).

(b) Réciproquement, considérer un vecteur propre v de f associé à une valeur propre arbitraire λ de f et montrer que $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Conclure.

Exercice 4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matrice définie par
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$$
Cette matrice est dite cyclique : chaque ligne de la matrice peut être déduite de la précédente en décalant chaque coefficient d'une position.

(1) Déterminer les valeurs propres de A (il n'est pas nécessaire de faire des calculs compliqués : on pourra observer que pour $\alpha = 0$ il y a deux fois deux lignes identiques, que pour tout α la somme des colonnes est un vecteur constant, et on pourra utiliser la trace).

(2) Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle symétrique définie positive ? singulière ?

(3) On suppose ici que $\alpha \neq 0$. Soit $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ donné. On considère la méthode de Jacobi pour la résolution du système $Ax = b$. Soit $(x^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs donnés par l'algorithme. On note $x_i^{(k)}$ pour $i = 1, \dots, 4$ les composantes de $x^{(k)}$. Donner l'expression de $x_i^{(k+1)}$, $i = 1, \dots, 4$, en fonction de $x_i^{(k)}$ et b_i, $i = 1, \dots, 4$. Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi converge-t-elle ?

(4) On suppose maintenant que A est symétrique définie positive. Reprendre la question précédente pour la méthode de Gauss-Seidel.