

**CONTRÔLE FINAL**  
**VENDREDI 10 JANVIER 2025 – DURÉE : 2H**

---

Aucun document n'est autorisé.

Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.

L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

---

**Exercice 1.** (Questions de cours)

(1) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) Donner la définition de la norme subordonnée  $\|M\|_1$ .

(b) Montrer que  $\|M\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |M_{i,j}|$ .

(2) Soit  $N = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$ .

Définir et calculer le conditionnement de  $N$  pour la norme subordonnée 1 sur  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ .

(3) On considère une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , dont on suppose qu'elle admet une décomposition LU (sans permutation).

(a) Rappeler la définition de la décomposition LU vue en cours.

(b) On note  $B = (b_{ij})$ ,  $L = (\ell_{ij})$ ,  $U = (u_{ij})$  et on considère toutes les sous-matrices principales  $B_k = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ ,  $L_k = (\ell_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ ,  $U_k = (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

(i) Montrer que, pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,  $B_k = L_k U_k$ .

(ii) En déduire que si  $B$  est une matrice symétrique définie positive alors tous les coefficients diagonaux de  $U$  sont strictement positifs.

(4) On considère la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  définie par  $q(x, y) = -xy$ . Écrire  $q$  comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 2.** On veut résoudre au sens des moindres carrés le système

$$D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire l'équation normale associée au problème aux moindres carrés.

(2) En déduire une solution du problème aux moindres carrés et justifier qu'elle est unique.

(3) Calculer la norme 2 du résidu, c'est-à-dire l'erreur d'approximation.

(4) Que représente géométriquement cette quantité ?

**Exercice 3.** On considère deux formes quadratiques  $q$  et  $q_0$  sur  $\mathbb{R}^n$ , avec  $q_0$  définie positive.

- (1) Montrer qu'il existe une base  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  orthonormée pour la forme  $q_0$ .
- (2) On note  $\varphi$  la forme polaire de  $q$ . Rappeler sa définition.
- (3) Comment s'écrit la matrice  $M_{(u_i)}(q)$  de  $q$  dans la base  $(u_1, \dots, u_n)$  ?
- (4) Si  $(v_1, \dots, v_n)$  est une autre base de  $\mathbb{R}^n$  orthonormée pour la forme  $q_0$ , quelle propriété vérifie la matrice  $P = \text{Mat}_{(u_i), (v_i)}(\text{Id})$  de passage de la base  $(u_1, \dots, u_n)$  à la base  $(v_1, \dots, v_n)$  ?
- (5) Soit  $M_{(v_i)}(q)$  la matrice de  $q$  dans la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . Quelle relation lie  $M_{(u_i)}(q)$  et  $M_{(v_i)}(q)$  ?
- (6) En déduire que  $\sum_{i=1}^n q(u_i) = \sum_{i=1}^n q(v_i)$ .
- (7) *Application* : on prend maintenant  $n = 2$  et on considère dans le plan euclidien un triangle (OAB) avec  $O, A, B$  trois points non alignés. On choisit pour  $q$  le carré de la norme euclidienne canonique de  $\mathbb{R}^2$ , i.e.  $q(x) = \|x\|^2$  pour  $x \in \mathbb{R}^2$ , et pour  $q_0$  la forme quadratique dont la matrice dans la base  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$  est la matrice identité. On note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et  $\varphi_0$  la forme polaire associée à  $q_0$ .
  - (a) Déterminer  $\varphi_0(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \sqrt{2}\overrightarrow{OI})$ ,  $\varphi_0(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$  et  $\varphi_0(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$ .
  - (b) En déduire que  $(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$  est une base orthonormée pour  $q_0$ .
  - (c) Déduire des questions précédentes la formule d'Apollonius  $OA^2 + OB^2 = 2OI^2 + \frac{1}{2}AB^2$ .

**Exercice 4.** L'objet de cet exercice est de comparer les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour les matrices tridiagonales.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible et tridiagonale, c'est-à-dire que  $a_{ij} = 0$  si  $|i - j| > 1$ . On considère la décomposition  $A = D - E - F$ , où  $D$  est la diagonale de  $A$ ,  $(-E)$  sa partie triangulaire inférieure stricte et  $(-F)$  sa partie triangulaire supérieure stricte. On suppose que  $D$  est inversible et on note  $\mathcal{L}_J$  et  $\mathcal{L}_{GS}$  les matrices d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution numérique d'un système linéaire associé à la matrice  $A$ .

- (1) Justifier que, sous les hypothèses de l'exercice, les matrices  $\mathcal{L}_J$  et  $\mathcal{L}_{GS}$  sont bien définies.
- (2) Rappeler la définition des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence pour chacune de ces méthodes.
- (3) Déterminer les matrices  $\mathcal{L}_J$  et  $\mathcal{L}_{GS}$  pour la matrice particulière

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et calculer leurs rayons spectraux. En déduire la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution numérique du système linéaire  $Ax = b$  où  $b \in \mathbb{R}^2$ .

- (4) On revient au cas général d'une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible et tridiagonale telle que  $\mathcal{L}_J$  et  $\mathcal{L}_{GS}$  soient bien définies. Montrer que  $\lambda \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}_J$  si et seulement s'il existe un vecteur complexe  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $x \neq 0$ , tel que

$$-a_{p,p-1}x_{p-1} - a_{p,p+1}x_{p+1} = \lambda a_{p,p}x_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

avec la convention  $x_0 = x_{n+1} = a_{n,n+1} = a_{1,0} = 0$ .

- (5) Soit  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$  défini par  $y_p = \lambda^p x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ , où  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  est une valeur propre non nulle de  $\mathcal{L}_J$  et  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$  un vecteur propre associé. Montrer que

$$-\lambda^2 a_{p,p-1}y_{p-1} - a_{p,p+1}y_{p+1} = \lambda^2 a_{p,p}y_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

avec la convention  $y_0 = y_{n+1} = a_{n,n+1} = a_{1,0} = 0$ .

- (6) Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}_J$  si et seulement si  $\lambda^2$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}_{GS}$ .
- (7) En déduire que  $\rho(\mathcal{L}_{GS}) = [\rho(\mathcal{L}_J)]^2$ , où  $\rho(\cdot)$  désigne le rayon spectral. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la vitesse de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les matrices tridiagonales ?
- (8) Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $\mathcal{L}_J$  si et seulement si  $-\lambda$  est aussi valeur propre.