UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Année universitaire 2024-2025

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES — L3 Mathématiques générales et applications

Algèbre linéaire et bilinéaire, analyse matricielle

CONTRÔLE FINAL
VENDREDI 10 JANVIER 2025 – DURÉE : 2H
CORRECTION

Aucun document n'est autorisé.
Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.
Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.
L'énoncé comporte 4 exercices indépendants.

Exercice 1. (Questions de cours)

(1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Donner la définition de la norme subordonnée $\|M\|_1$.

$\|M\|_1 = \sup_{x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1}$ où $\|.\|_1$ désigne la norme 1 sur $\mathbb{C}^n$, i.e. $\|(x_1,\dots,x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$

(b) Montrer que $\|M\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^n |M_{i,j}|$.

On a pour tout $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, $Mx = (\sum_j M_{i,j}x_j)_i$ donc $\|Mx\|_1 = \sum_i |\sum_j M_{i,j}x_j| \le \sum_i\sum_j |M_{i,j}\, x_j| = \sum_i\sum_j |M_{i,j}|\,|x_j| = \sum_j(\sum_i |M_{i,j}|)|x_j| \le (\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |M_{i,j}|)\sum_j |x_j| = (\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |M_{i,j}|)\,\|x\|_1$ donc $\|M\|_1 \le \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |M_{i,j}|$.
Réciproquement, soit j_0 tel que $\sum_{i=1}^n |M_{i,j_0}| = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |M_{i,j}|$ et soit $\bar{x} = (x_1,\dots,x_n)$ tel que $x_j = 0$ pour $j \neq j_0$ et $x_{j_0} = 1$. On a $\|\bar{x}\|_1 = 1$ et $M\bar{x} = (M_{i,j_0})_i$ donc $\|M\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |M_{i,j_0}| = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |M_{i,j}|$. Comme $\|\bar{x}\|_1 = 1$, on a $\|M\bar{x}\|_1 = \frac{\|M\bar{x}\|_1}{\|\bar{x}\|_1} \le \|M\|_1$, d'où $\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^n |M_{i,j}| \le \|M\|_1$

(2) Soit $N = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ i & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Définir et calculer le conditionnement de N pour la norme subordonnée 1 sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

La matrice N est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible. On inverse facilement N en résolvant par méthode de descente le système $N\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. On trouve $N^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ -1 & i & 0 \\ -10 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Le conditionnement de N pour la norme subordonnée $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est $\mathrm{cond}_1(N) = \|N\|_1\,\|N^{-1}\|_1$. On trouve grâce à la question précédente $\|N\|_1 = 3$ et $\|N^{-1}\|_1 = 12$ donc $\mathrm{cond}_1(N) = 36$.

(3) On considère une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, dont on suppose qu'elle admet une décomposition LU (sans permutation).

(a) Rappeler la définition de la décomposition LU vue en cours.

$B = LU$ avec L triangulaire inférieure à diagonale unité et U triangulaire supérieure.

(b) On note $B = (b_{ij})$, $L = (\ell_{ij})$, $U = (u_{ij})$ et on considère toutes les sous-matrices principales $B_k = (b_{ij})_{1\le i,j\le k}$, $L_k = (\ell_{ij})_{1\le i,j\le k}$, $U_k = (u_{ij})_{1\le i,j\le k}$, $k = 1,\dots,n$.

(i) Montrer que, pour tout $k = 1,\dots,n$, $B_k = L_kU_k$.

Pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$ et $1 \le i,j,\le k$, $(B_k)_{i,j} = B_{i,j} = \sum_{1\le\ell\le n} L_{i,\ell}U_{\ell,j} = \sum_{j\le\ell\le i} L_{i,\ell}U_{\ell,j}$ car L est triangulaire inférieure et U est triangulaire supérieure (avec la convention qu'une somme vide est nulle). Or $1 \le i,j,\le k$ donc $(B_k)_{i,j} = \sum_{1\le\ell\le k} L_{i,\ell}U_{\ell,j} = \sum_{1\le\ell\le k}(L_k)_{i,\ell}(U_k)_{\ell,j}$ d'où $B_k = L_kU_k$.

(ii) En déduire que si B est une matrice symétrique définie positive alors tous les coefficients diagonaux de U sont strictement positifs.

Par le critère de Sylvester, on sait que tous les déterminants mineurs principaux $\det(B_k)$, $k = 1, \dots, n$, sont strictement positifs. D'après la question précédente, on a pour tout $k = 1, \dots, n$, $\det(B_k) = \det(L_k U_k) = \det(L_k)\det(U_k) = \Pi_{i=1}^k u_{ii}$ car L est triangulaire à diagonale unité et U est triangulaire. Pour $k = 1$, on a $u_{11} = \det(B_1) > 0$. Pour tout $1 < k \leq n$, on a $\Pi_{i=1}^k u_{ii} = \det(B_k) > 0$ et $\Pi_{i=1}^k u_{ii} = u_{kk}\Pi_{i=1}^{k-1} u_{ii} = u_{kk}\det(B_{k-1})$. Or $\det(B_{k-1}) > 0$ donc $u_{kk} > 0$.

(4) On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x, y) = -xy$. Écrire q comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes sur $\mathbb{R}^2$.

On a, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = \frac{1}{4}[(x - y)^2 - (x + y)^2]$ donc $q = \frac{1}{4}[\ell_1^2 - \ell_2^2]$ où les deux formes $\ell_1 : (x, y) \mapsto x - y$ et $\ell_2 : (x, y) \mapsto x + y$ sont linéaires et indépendantes.

Exercice 2. On veut résoudre au sens des moindres carrés le système

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire l'équation normale associée au problème aux moindres carrés.

C'est l'équation $D^t D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = D^t \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc après calcul $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 30 \end{pmatrix}$.

(2) En déduire une solution du problème aux moindres carrés et justifier qu'elle est unique.

$D^t D$ est inversible donc l'équation normale admet une unique solution : le vecteur $(4, 3)$. Or, par un théorème du cours, un vecteur est une solution du problème aux moindre carrés si et seulement s'il est solution de l'équation normale donc le problème aux moindres carrés admet $(x_0, y_0) = (4, 3)$ comme unique solution.

(3) Calculer la norme 2 du résidu, c'est-à-dire l'erreur d'approximation.

Le résidu est $D\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$. Sa norme euclidienne est $\sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

(4) Que représente géométriquement cette quantité ?

Cette quantité coïncide avec $\min_{(x,y)} \|D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}\|_2$, c'est donc la distance (pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$) du vecteur $\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(D)$ engendré par les colonnes de D.

Exercice 3. On considère deux formes quadratiques q et q_0 sur $\mathbb{R}^n$, avec q_0 définie positive.

(1) Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour la forme q_0.

Méthode 1 : comme q_0 est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, il existe d'après un théorème du cours une base $(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ q_0-orthogonale. Comme q_0 est définie positive, $q_0(\tilde{u}_i) > 0$ pour tout i donc on peut définir $u_i = \tilde{u}_i/\sqrt{q_0(\tilde{u}_i)}$ et $(u_1, \dots, u_n)$ est une base q_0-orthonormée.

Méthode 2 : q_0 étant définie positive, sa forme polaire φ_0 définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On choisit une base quelconque de $\mathbb{R}^n$, on l'orthonormalise par Gram-Schmidt, et on obtient une base $(u_1, \dots, u_n)$ q_0-orthonormée.

(2) On note φ la forme polaire de q. Rappeler sa définition.

C'est l'unique forme bilinéaire symétrique vérifiant $\varphi(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(3) Comment s'écrit la matrice $M_{(u_i)}(q)$ de q dans la base $(u_1, \dots, u_n)$?

C'est la matrice dont l'élément (i, j) est $\varphi(u_i, u_j)$. En particulier, les éléments diagonaux sont les $\varphi(u_i, u_i) = q(u_i)$.

(4) Si $(v_1, \dots, v_n)$ est une autre base de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour la forme q_0, quelle propriété vérifie la matrice $P = \mathrm{Mat}_{(u_i),(v_i)}(\mathrm{Id})$ de passage de la base $(u_1, \dots, u_n)$ à la base $(v_1, \dots, v_n)$?

La forme polaire φ_0 de q_0 définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. La matrice de passage entre deux bases orthonormées pour ce produit scalaire est, par théorème, une matrice orthogonale. On en déduit que $P \in O_n(\mathbb{R})$, i.e. P est inversible et $P^t = P^{-1}$.

(5) Soit $M_{(v_i)}(q)$ la matrice de q dans la base $(v_1, \dots, v_n)$. Quelle relation lie $M_{(u_i)}(q)$ et $M_{(v_i)}(q)$?

Comme il s'agit des matrices de la même forme quadratique exprimées dans deux bases différentes, on sait par un résultat de cours qu'elles sont liées par la relation de congruence $M_{(v_i)}(q) = P^t\, M_{(u_i)}(q)\, P$.

(6) En déduire que $\sum_{i=1}^n q(u_i) = \sum_{i=1}^n q(v_i)$.

On a $\sum_{i=1}^n q(v_i) = \mathrm{trace}(M_{(v_i)}(q)) = \mathrm{trace}(P^t\, M_{(u_i)}(q)\, P) = \mathrm{trace}(M_{(u_i)}(q)\, P\, P^t) = \mathrm{trace}(M_{(u_i)}(q)) = \sum_{i=1}^n q(u_i)$ car $P\, P^t = I_n$.

(7) *Application* : on prend maintenant $n = 2$ et on considère dans le plan euclidien un triangle (OAB) avec O, A, B trois points non alignés. On choisit pour q le carré de la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$, i.e. $q(x) = \|x\|^2$ pour $x \in \mathbb{R}^2$, et pour q_0 la forme quadratique dont la matrice dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est la matrice identité. On note I le milieu du segment $[AB]$ et φ_0 la forme polaire associée à q_0.

(a) Déterminer $\varphi_0(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \sqrt{2}\overrightarrow{OI})$, $\varphi_0(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$ et $\varphi_0(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$.

On a $\varphi_0(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \sqrt{2}\overrightarrow{OI}) = 2\varphi_0(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI}) = 2\varphi_0(\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}, \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}) = \frac{1}{2}q_0(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$. On développe :

$$\frac{1}{2}q_0(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}q_0(\overrightarrow{OA}) + \varphi_0(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}q_0(\overrightarrow{OB})$$

Comme la matrice de q_0 dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est la matrice identité, on a $q_0(\overrightarrow{OA}) = q_0(\overrightarrow{OB}) = 1$ et $\varphi_0(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0$. On en déduit que

$$\varphi_0(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \sqrt{2}\overrightarrow{OI}) = \frac{1}{2}(q(\overrightarrow{OA}) + q(\overrightarrow{OB})) = 1$$

On procède de façon similaire pour obtenir que

$$\varphi_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\varphi_0\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}(q(\overrightarrow{OB}) + q(\overrightarrow{OA})) = 1,$$

$$\varphi_0\left(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}\right) = \varphi_0\left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}, \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = \frac{1}{2}(q(\overrightarrow{OB}) - q(\overrightarrow{OA})) = 0.$$

(b) En déduire que $(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$ est une base orthonormée pour q_0.

C'est une conséquence immédiate des calculs de la question précédente.

(c) Déduire des questions précédentes la formule d'Apollonius $OA^2 + OB^2 = 2OI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}, \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB})$ sont deux bases q_0-orthonormées. Il découle de la question (6) que $q(\overrightarrow{OA}) + q(\overrightarrow{OB}) = q(\sqrt{2}\overrightarrow{OI}) + q(\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}) = 2q(\overrightarrow{OI}) + \frac{1}{2}q(\overrightarrow{AB})$. C'est exactement la formule voulue puisque q est le carré de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. L'objet de cet exercice est de comparer les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour les matrices tridiagonales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et tridiagonale, c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $|i-j| > 1$. On considère la décomposition $A = D - E - F$, où D est la diagonale de A, $(-E)$ sa partie triangulaire inférieure stricte et $(-F)$ sa partie triangulaire supérieure stricte.

On suppose que D est inversible et on note $\mathcal{L}_J$ et $\mathcal{L}_{GS}$ les matrices d'itération des méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel pour la résolution numérique d'un système linéaire associé à la matrice A.

(1) Justifier que, sous les hypothèses de l'exercice, les matrices $\mathcal{L}_J$ et $\mathcal{L}_{GS}$ sont bien définies.

Par hypothèse, D est inversible, donc la matrice $\mathcal{L}_J = D^{-1}(E+F)$ est bien définie. La matrice $D-E$ est triangulaire et $-E$ est triangulaire inférieure stricte donc $\det(D-E) = \det(D) \neq 0$. La matrice $\mathcal{L}_{GS} = (D-E)^{-1}F$ est donc bien définie.

(2) Rappeler la définition des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel. Donner une condition nécessaire et suffisante de convergence pour chacune de ces méthodes.

Pour résoudre numériquement le système $Ax = b$, on se donne un vecteur initial x_0 et on considère les suites définies par $x_{k+1} = \mathcal{L}_J x_k + D^{-1}b$ (méthode de Jacobi) ou $x_{k+1} = \mathcal{L}_{GS}x_k + (D-E)^{-1}b$ (méthode de Gauss-Seidel). Ces méthodes convergent quel que soit le point initial x_0 si et seulement si le rayon spectral des matrices d'itération $\mathcal{L}_J$ ou $\mathcal{L}_{GS}$ est < 1.

(3) Déterminer les matrices $\mathcal{L}_J$ et $\mathcal{L}_{GS}$ pour la matrice particulière

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et calculer leurs rayons spectraux. En déduire la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution numérique du système linéaire $Ax = b$ où $b \in \mathbb{R}^2$.

On a $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $-E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $-F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{L}_J = D^{-1}(E+F) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ qui a pour valeurs propres $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ donc son rayon spectral est $\frac{1}{2}$. On a ensuite $\mathcal{L}_{GS} = (D-E)^{-1}F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ qui a pour valeurs propres 0, $\frac{1}{4}$ donc son rayon spectral est $\frac{1}{4}$. Les deux méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel appliquées à la matrice D convergent.

(4) On revient au cas général d'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et tridiagonale telle que $\mathcal{L}_J$ et $\mathcal{L}_{GS}$ soient bien définies. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_J$ si et seulement s'il existe un vecteur complexe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$, tel que

$$-a_{p,p-1}x_{p-1} - a_{p,p+1}x_{p+1} = \lambda a_{p,p}x_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

avec la convention $x_0 = x_{n+1} = a_{n,n+1} = a_{1,0} = 0$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_J$ si et seulement s'il existe $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ tel que $D^{-1}(E+F)x = \lambda x$ ce qui équivaut à $(E+F)x = \lambda Dx$ qu'on vérifie être l'expression matricielle des égalités demandées.

(5) Soit $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ défini par $y_p = \lambda^p x_p$, $p = 1, \dots, n$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre non nulle de $\mathcal{L}_J$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Montrer que

$$-\lambda^2 a_{p,p-1}y_{p-1} - a_{p,p+1}y_{p+1} = \lambda^2 a_{p,p}y_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

avec la convention $y_0 = y_{n+1} = a_{n,n+1} = a_{1,0} = 0$.

On part des égalités démontrées à la question précédente :

$$-a_{p,p-1}x_{p-1} - a_{p,p+1}x_{p+1} = \lambda a_{p,p}x_p, \quad p = 1, \dots, n,$$

qui équivalent (comme $\lambda \neq 0$) à

$$-a_{p,p-1}\frac{y_{p-1}}{\lambda^{p-1}} - a_{p,p+1}\frac{y_{p+1}}{\lambda^{p+1}} = \lambda a_{p,p}\frac{y_p}{\lambda^p}, \quad p = 1, \dots, n.$$

On multiplie, pour chaque p, la ligne d'indice p par λ^{p+1}, et on obtient les égalités voulues. On observe que ces égalités correspondent à l'égalité matricielle $(\lambda^2 E + F)y = \lambda^2 Dy$.

(6) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que λ est une valeur propre de $\mathcal{L}_J$ si et seulement si λ^2 est une valeur propre de $\mathcal{L}_{GS}$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de $\mathcal{L}_J$ et x est un vecteur propre associé, on définit le vecteur $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ par $y_p = \lambda^p x_p$, $p = 1, \dots, n$ et on déduit de la question précédente que $(\lambda^2 E + F)y = \lambda^2 Dy$ donc $(D - E)^{-1}Fy = \lambda^2 y$. Comme y n'est pas nul, on en déduit que λ^2 est une valeur propre de $\mathcal{L}_{GS}$.

Réciproquement, si $\lambda^2 \in \mathbb{C}^*$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_{GS}$ et y un vecteur propre associé, on définit le vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ par $x_p = \frac{y_p}{\lambda^p}$, $p = 1, \dots, n$ et on obtient grâce à ce qui précède que $(E + F)x = \lambda Dx$ donc $D^{-1}(E + F)x = \lambda x$. Comme x est non nul, on en déduit que λ est valeur propre de $\mathcal{L}_J$.

(7) En déduire que $\rho(\mathcal{L}_{GS}) = [\rho(\mathcal{L}_J)]^2$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la vitesse de convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour les matrices tridiagonales ?

D'après ce qui précède, les rayons spectraux sont soit tous les deux nuls, soit tous les deux non nuls. S'ils ne sont pas nuls, on déduit de la question précédente que $\rho(\mathcal{L}_{GS}) = [\rho(\mathcal{L}_J)]^2$ (qui est évidemment vrai aussi s'ils sont nuls). En effet, soit $\mu \neq 0$ une valeur propre de $\mathcal{L}_{GS}$ telle que $|\mu| = \rho(\mathcal{L}_{GS})$. D'après la question précédente, si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie $\lambda^2 = \mu$ alors λ est une valeur propre de $\mathcal{L}_J$. Comme $|\lambda| \leq \rho(\mathcal{L}_J)$ et $\rho(\mathcal{L}_{GS}) = |\mu| = |\lambda^2| = |\lambda|^2$ on en déduit que $\rho(\mathcal{L}_{GS}) \leq [\rho(\mathcal{L}_J)]^2$.

Réciproquement, si λ est une valeur propre non nulle de $\mathcal{L}_J$ telle que $|\lambda| = \rho(\mathcal{L}_J)$ alors λ^2 est une valeur propre de $\mathcal{L}_{GS}$ et $[\rho(\mathcal{L}_J)]^2 = |\lambda|^2 = |\lambda^2| \leq \rho(\mathcal{L}_{GS})$.

On a donc bien

$$\rho(\mathcal{L}_{GS}) = [\rho(\mathcal{L}_J)]^2$$

On en déduit que les deux méthodes convergent simultanément ou divergent simultanément. Et si elles convergent, les deux rayons spectraux sont < 1 et la méthode de Gauss-Seidel converge donc beaucoup plus vite que celle de Jacobi.

(8) Montrer que λ est une valeur propre de $\mathcal{L}_J$ si et seulement si $-\lambda$ est aussi valeur propre.

C'est évident si $\lambda = 0$. Lorsque $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a, d'après la question (6),

$$\lambda \text{ v.p. de } \mathcal{L}_J \Leftrightarrow \lambda^2 \text{ v.p. de } \mathcal{L}_{GS} \Leftrightarrow (-\lambda)^2 \text{ v.p. de } \mathcal{L}_{GS} \Leftrightarrow -\lambda \text{ v.p. de } \mathcal{L}_J.$$