CONTRÔLE PARTIEL
VENDREDI 8 NOVEMBRE 2024 – DURÉE : 1H30

Aucun document n'est autorisé.

Aucun appareil électronique (en particulier un téléphone ou une calculatrice) n'est autorisé.

Les réponses devront être rédigées et argumentées avec soin.

L'énoncé comporte 5 exercices indépendants.

Exercice 1. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 16yz + 9z^2.$$

- (1) Décomposer q en combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes. En déduire le rang et la signature de q .
- (2) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q , puis donner la matrice de q dans cette base.
- (3) Pour un réel a , on note $v_a = (a, -1, 1)$ et F_a l'orthogonal de v_a pour q .
 - (a) Quelle est la dimension de F_a ?
 - (b) À quelle condition sur a a-t-on $\mathbb{R}^3 = F_a \oplus \mathbb{R}v_a$?

Exercice 2. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_3.$$

- (1) Donner la forme polaire de la forme quadratique q , puis sa matrice dans la base canonique.
- (2) À l'aide de l'algorithme de Gauss, calculer la signature de q .
- (3) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q soit $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$?

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère sur $\mathbb{R}_n[X]$ la forme quadratique donnée par

$$q(P) = \int_0^1 P^2(x)dx - \left(\int_0^1 P(x)dx \right)^2.$$

- (1) Montrer que q est positive.
- (2) Quelle est sa signature ?

Exercice 4. On veut calculer la quantité $\delta = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\infty e^{-t}(t^2 - (at + b))^2 dt$.

- (1) Pourquoi est-ce que δ est bien défini ?
- (2) Déterminer un espace euclidien E , un sous-espace vectoriel F et un élément u de E tels que $\delta = d(u, F)^2$, où $d(u, F) = \inf\{\|u - v\| : v \in F\}$.
- (3) Calculer δ . (On pourra utiliser sans justification la formule $n! = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$.)

Exercice 5. Soit E un espace hermitien. On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$. Pour x et y dans E , exprimer en fonction de $\|x\|$ et $\|y\|$ la quantité

$$\|x + y\|^2 + \|x + jy\|^2 + \|x + j^2y\|^2.$$