
Feuille de TP 4 : Illustration des théorèmes limites

Dans ce TP, on utilisera les bibliothèques suivantes :

```
import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; import scipy.stats as st
```

1 Loi des grands nombres

Le but de cette section est de visualiser la loi forte des grands nombres. On se donne une suite de v.a. i.i.d. $(X_n)_{n \geq 1}$, et, en fonction du choix de loi pour X_1 , on s'intéresse au comportement asymptotique de

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Exercice TP4.1

1. En utilisant par exemple `st.binom.rvs`, construire un tableau x contenant une simulation des valeurs des v.a. (X_1, X_2, \dots, X_N) de variables indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, 0.5)$ pour N grand (par exemple $N=2000$).
2. Rappeler vers quoi Y_n converge selon la loi forte des grands nombres et dans quel sens ?
3. En utilisant `np.cumsum` ou `np.mean`, construire un tableau y contenant les valeurs des v.a. $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$.
4. Visualiser le comportement de la suite $(Y_n)_{1 \leq n \leq N}$ à l'aide de la commande `plt.plot(y)`

Qu'observe-t-on ? (on tracera sur le même graphique la valeur attendue de la limite)

5. En utilisant, `st.norm.rvs`, simuler un échantillon X de $N = 2000$ variables de loi normale de moyenne 1 et de variance 4. Tracer un histogramme pour X et le comparer à la densité théorique obtenu par `st.norm.pdf`. (On pourra utiliser aussi `np.linspace` pour obtenir le vecteur des abscisses de la courbe de densité.)
6. Reprendre les questions 3 et 4 construisant (Y_n) à partir du nouveau (X_n) pour les lois normales.

2 Théorème centrale limite

Exercice TP4.2 Soit $(X_n)_{1 \leq n \leq 1000}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On considère :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad V_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - 1).$$

1. Simuler 1000 réalisations indépendantes $v_1^{(i)}$ de V_1 pour $i = 1 \dots 1000$ (on pourra utiliser `st.expon.rvs`) . Simuler ensuite 1000 réalisations indépendantes $v_3^{(i)}$ de V_3 , puis $v_{100}^{(i)}$ de V_{100} .
2. Représenter l'histogramme illustrant les lois respectives de V_1 , V_3 , V_{100} sur 3 graphiques côte à côte. On pourra utiliser

```
fig,ax = plt.subplots(1,3)
ax[0].hist(...)
ax[1].hist(...)
ax[2].hist(...)
```
3. Tracer sur les mêmes histogrammes les densités de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
4. Quel type de convergence illustre-t-on ici ? Commenter

Exercice TP4.3

1. Soit S_N de loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$ avec $p = 0.5$ et $N = 10000$. Simuler à l'aide de `st.binom.rvs` un échantillon de $M=5000$ variables de même loi que

$$V_N = \sqrt{N} \frac{\bar{X}_N - p}{\sqrt{p(1-p)}}$$

avec $\bar{X}_N = \frac{S_N}{N}$.

2. Illustrer le Théorème centrale limite en traçant l'histogramme des M réalisations et en le comparant à la densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.