Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2024–2025**

L2 - Informatique — UE : Statistiques pour l'Informatique

Feuille de TD 5

Les lois continues usuelles.

	notation	valeurs que X peut prendre	densité $\rho_X(x)$	espérance	variance
loi normale	$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$x \in \mathbf{R}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	μ	σ^2
loi exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$x \in \mathbf{R}^+$	$\lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ 0 sinon	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
loi uniforme	$\mathcal{U}[a,b]$	$x \in [a,b]$	$\dfrac{1}{b-a}$ si $x \in [a,b]$ 0 sinon	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice 5.1. Soit X une variable aléatoire et $F_X(x) = P(X \leq x)$ sa fonction de répartition.

1. Quelle est la relation entre la fonction de répartition et la loi de X (les données de $P(X = x)$ pour $x \in \mathrm{im}X$) dans le cas discret ?
2. Quelle est la relation entre la fonction de répartition et la loi de X (la densité de de probatilité $\rho(x)$) dans le cas continue ?
3. Quelle propriété marquante de la fonction de répartition distingue le cas discret du cas continue ?

Exercice 5.2. Donnez la fonction de répartition pour

1. La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
2. La loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$.

Exercice 5.3. On suppose que le nombre d'années avant que la Terre ne soit frappée par un grand astéroïde suit une loi exponentielle avec paramètre $\lambda = 10^{-8}$ par année.

1. Quelle est l'espérance du temps jusqu'à l'impact ?
2. Quelle est la probabilité d'un impact pendant les prochains 100 ans ?
3. Quelle est la probabilité d'un impact pendant la période des $4 \cdot 10^9$ ans de vie sur Terre ?

Exercice 5.4. Soit X une v.a. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Tracer le graphe de la densité ρ.
2. On considère la v.a. $Y = -X$. Montrez que Y suit aussi la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
3. Donner, sans faire de calcul d'intégrale, $P[X \leq 0]$.
4. En utilisant la table de la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, que vous trouverez à la suite des exercices, déterminer

$$P[X \leq 2.2],\ P[X \geq 1.25],\ P[X < -1],\ P[0 \leq X \leq 2]$$

puis

$$P[-1 \leq X \leq 1],\ P[-2 \leq X \leq 2],\ P[-3 \leq X \leq 3]$$

Exercice 5.5. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Quelle est la loi de la variable centrée réduite associée à X ?
2. Quelle est la probabilité que $X \leq \mu$?
3. Quelle est la probabilité que $X < \mu + \sigma$?

Exercice 5.6. Une machine produit des vis de longueur moyenne de 500mm avec un écart-type de 10mm. On peut supposer que la longueur suit une loi normale.

1. Quelle est la probabilité qu'une vis soit plus courte que 485mm ?
2. Quelle est la probabilité qu'une vis soit entre 499mm et 501mm ?
3. Quelle est la probabilité qu'une vis ne puisse pas être vendue parce que la longueur diffère de plus de 50mm de la longueur moyenne ?

Exercice 5.7. On suppose que le temps de passage en caisse des clients d'un magasin suit une loi exponentielle d'une moyenne de 5 minutes.

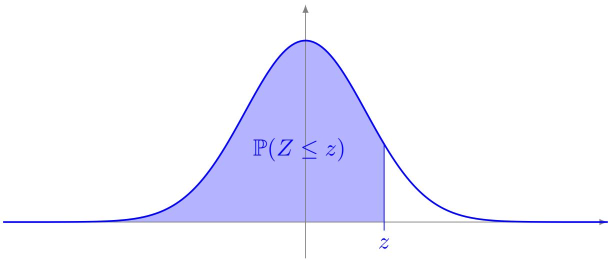
1. Quelle est la probabilité d'attendre au moins 5 minutes s'il y a une seule caisse et un seul client avant ?
2. Quelle est la probabilité d'attendre au moins 5 minutes s'il y a deux caisses avec un client chacune et qu'on peut prendre la première caisse qui se libère ? (On suppose que les temps d'attente des deux clients sont indépendants).

Exercice 5.8. Alice et Mohamed ont rendez-vous chez William entre 12h et 14h. On suppose que les instants d'arrivée d'Alice et Mohamed sont des variables aléatoires X et Y indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 2]$ (l'instant 0 correspondant à midi et l'unité de temps étant l'heure).

1. Soit $U = X + Y$. Que vaut $\mathbb{E}(U)$?
2. Exprimer la variable aléatoire V donnant le temps que William doit attendre jusqu'à ce que ses deux amis soient arrivés. Déterminez la fonction de répartition de cette variable aléatoire, sa densité, et son espérance.
3. Montrez que, pour x et y réels : $\max(x, y) - \min(x, y) = 2\max(x, y) - (x + y)$.
4. Déduisez des questions précédentes le temps moyen que William doit attendre entre la première et la deuxième arrivée.

Exercice 5.9. Pour se rendre d'un endroit A à un endroit B, on peut prendre le bus ou le métro. Le temps de trajet en métro suit une loi exponentielle de moyenne 20 minutes, et le temps de trajet en bus est une variable indépendante de la première, de loi exponentielle de moyenne 35 minutes. Quelle est la probabilité que le trajet en bus soit plus rapide que le trajet en métro ?

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Grandes valeurs de z :

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	4.0	4.5
$F(z)$	0.9987	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999968	0.999997