Feuille de TD 4

Nous rappelons tout d'abord les lois discrètes usuelles, qui seront à connaître !

	notation	valeurs que X peut prendre	$\mathbb{P}(X=k)$	espérance	variance
loi de Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$k \in \{0,1\}$	$p^k(1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
loi binomiale	$\mathcal{B}(n,p)$	$k \in \{0,1,\cdots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
loi géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$k \in \mathbb{N}^*$	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
loi de Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$k \in \mathbb{N}$	$\exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ
loi uniforme	$\mathcal{U}(n)$	$k \in \{1,2,\cdots,n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

Exercice 4.1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ avec $\mathbb{P}(X=-1)=\mathbb{P}(X=0)=1/4$. Calculer $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 4.2. Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme sur $\{1,2,\cdots,n\}$.
Indication : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

Exercice 4.3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2,p)$. Soit f la fonction $f(x) = (x-1)^2$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$.

Exercice 4.4. Déterminez la loi (et spécifiez son nom) de la variable X dans les situations suivants :

1. On lance un dé (non-truqué) dix fois. X désigne le nombre de fois où le résultat «6» est obtenu.
2. On lance un dé (non-truqué) jusqu'à avoir obtenu un 6. X désigne le nombre de lancers.

Exercice 4.5. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissement des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans les cabinets médicaux de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements $A =$ « Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent » et $B =$ « Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent » ?
2. Soit X la variable aléatoire « nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres ». Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 4.6. Une installation technique comporte un très grand nombre de modules d'un certain type. En moyenne, 3 modules tombent en panne chaque jour. On peut supposer que la répartition des pannes dans l'installation suit une loi de Poisson.

1. Quel est la valeur du paramètre de la loi de Poisson ?
2. Quelle est la probabilité que 3 modules tombent en panne en un jour ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus 1 modules tombent en panne en une heure ?
4. L'installation technique doit être améliorée. L'objectif est de faire en sorte que la probabilité que 1 ou plusieurs modules tombent en panne chaque jour soit inférieure à 10%. Combien de modules tomberaient alors en panne en moyenne chaque jour ?

Exercice 4.7. Fonctions de répartition. On considère une v.a. X dont on connait la fonction de répartition F_X. Cette fonction est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, 1[\ ; \\ \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1, 2[\ ; \\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [2, 3[\ ; \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de cette fonction.
2. Écrire en fonction de la fonction de répartition F_X toutes les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}\big(X = \frac{3}{2}\big)$, $\mathbb{P}\big(X \in]0, 2]\big)$, puis les calculer.
3. Donner la loi de X (c'est-à-dire l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, ainsi que les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$).

Exercice 4.8. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau suivant.

$X\backslash Y$	0	1	2
0	1/9	2/9	0
1	2/9	???	1/9
2	1/9	1/9	1/9

1. Calculer la probabilité de l'événement $(X, Y) = (1, 1)$.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la covariance de X et Y.
5. Calculer la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $Z = X + Y$. Est-ce que l'espérance de Z est la somme des espérances de X et Y ? Et pour la variance ?

Exercice 4.9. Soit X et Y deux v.a., et $p, q \in [0, 1]$. La loi du couple (X, Y) est $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1 - p - q + pq$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = p - pq$, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = q - pq$, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = pq$.

1. Quelles sont les lois de X et Y ?
2. Est-ce que X et Y sont indépendantes ?

Exercice 4.10. Soit X une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre p et Y une v.a. de loi de Bernoulli de paramètre q. On suppose que les deux variables sont indépendantes. Déterminer la loi de la variable $Z = X - Y$.

Exercices supplémentaires.

Exercice 4.11. Soient X et Y deux v.a. indépendantes, de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètres respectifs p et q. Quelle loi suit la v.a. $Z = \min(X, Y)$?

Exercice 4.12. On lance une piece (non-truquée) n fois au hasard. X désigne la différence entre le nombre de fois qu'on obtient pile et le nombre de fois qu'on obtient face.

1. Calculez l'espérance et l'écart type de X.
2. Trouver $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ t.q. $Y = aX + b$ suit une loi binomiale.

Exercice 4.13. Un candidat se présente à un concours où les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. Le candidat répond au hasard aux questions. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance, sa variance.

Exercice 4.14. Dans un pot il y a dix billes dont quatre sont marquées avec le chiffre 1, trois avec le chiffre 2, deux avec le chiffre 3 et une avec le chiffre 4. On tire 3 billes au hasard, l'une après l'autre, en remettant chaque fois dans le pot la bille tirée.

1. Déterminez la loi de la variable X qui désigne le nombre de billes avec chiffre 1 ou 2 obtenus.
2. Déterminez la loi de la variable Y qui désigne la somme des chiffres obtenus.

Exercice 4.15. **(Partiel 2021)**
Deux étudiants choisissent au hasard (et indépendamment) chacun un code PIN de 4 chiffres DISTINCTS (parmi les 10 chiffres, ex : 1493 et 9163).

1. Quel est l'espace des réalisations Ω et la probabilité P sur Ω correspondant à l'expérience ?
2. Quelle est la probabilité que les 2 étudiants aient choisi le même code ?
3. Quelle est la probabilité que les 2 codes commencent par le même chiffre ? (ex : 1493 et 1695)

Exercice 4.16. **(Partiel 2020)** Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 12 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute peut être considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute n et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. Soit X le nombre de personnes se présentant au guichet entre 10h et 12h.

1. Calculer la loi de X.
2. Calculer $P(X \leq 118)$.
3. Quelle est l'espérance de la variable X ? Quelle est sa variance ?