
Feuille de TD 3

Exercice 3.1 On lance deux dés (à 6 faces). Décrire l'espace des événements Ω. On le munit de la probabilité uniforme (rappeler la formule du cours décrivant cette probabilité). Déterminer la probabilité des événements correspondant à trouver chacune des valeurs $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ou 12 comme somme de deux résultats. Indication : on pourra distinguer les valeurs en dessous de 7 et celles au dessus.

Exercice 3.2 On lance n fois une pièce. On munit l'espace des événements de la probabilité uniforme.

1. Décrire l'espace de probabilité.
2. Quelle est la probabilité qu'on trouve exactement k fois pile ?
3. Quelle est la probabilité que la liste de résultats reste la même si l'on lit dans le sens inverse ?

Exercice 3.3

1. On possède deux pièces truquées différentes, la première obtient face avec probabilité p, la seconde avec probabilité q. On lance ces deux pièces successivement et indépendamment. Décrire l'ensemble Ω et construire une probabilité sur Ω.

   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois face ?
2. Deux archers tirent indépendamment sur n cibles, une flèche par cible et par archer. Le premier touche avec probabilité p, le second avec probabilité q, les tirages d'un même archer étant aussi indépendants. Décrire l'espace des événements Ω et construire une probabilité du Ω.

   Quelle est la probabilité que k cibles au moins soient épargnées ?

Exercice 3.4 Pour se rendre à la Doua, une étudiante a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D. La probabilité qu'elle choisisse A (respectivement B, C) est $1/3$ (respectivement $1/4$, $1/12$). La probabilité d'arriver en retard en empruntant le chemin A (respectivement B, C) est $1/20$ (resp. $1/10$, $1/5$). En empruntant le chemin D elle n'est jamais en retard.

1. Calculer la probabilité que l'étudiante arrive en retard.
2. Un jour donné, l'étudiante est en retard. Quelle est la probabilité qu'elle ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice 3.5 Alors qu'ils ne représentent que 13% de la population, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 30% des tués sur la route. À l'aide de ces données vérifier qu'un jeune a 2.87 fois plus de risque de mourir sur la route qu'un autre usager.

Exercice 3.6 On lance deux pièces au hasard. On munit l'espace de réalisation Ω que l'on précisera avec la probabilité uniforme.
On note A l'événement "les deux résultats sont identiques", B l'événement "la première pièce donne Pile" et C l'événement "la seconde pièce donne Face".
Montrer que les trois événements sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants.

Exercices supplémntaires.

Exercice 3.7 Deux événements A et B disjoints ($A \cap B = \emptyset$) et de probabilités non nulles, peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 3.8 On considère une infinité de lancers d'un dé (équilibré à six faces) et on veut déterminer la probabilité de ne jamais obtenir le nombre 1. Pour cela, on introduit pour chaque entier n les événements :

- B : « ne jamais obtenir de 1 » ;
- A_n : « ne pas obtenir de 1 au cours des n premiers lancers ».

1. Comment écrire B à l'aide des événements A_n ($n \geq 1$) ?
2. Est-ce que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'événements ?
3. Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n.
4. En déduire $\mathbb{P}(B)$. Que peut-on dire de l'événement B ?

Exercice 3.9

1. On lance deux dés équilibrés (à six faces) indépendamment. Quelle est la probabilité que la somme des deux résultats soit égale à 7 ? Quelle est l'espérance de la somme ?
2. Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins un 6 ?
3. Lequel des deux événements suivants est plus probable : obtenir au moins une fois un six en 4 lancers d'un dé ou obtenir au moins une fois un double-six en 24 lancers de deux dés ?

Exercice 3.10 Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}5$. Trouver $\mathbb{P}(B)$ quand :

(a) A et B sont indépendants ;

(b) A et B sont incompatibles ;

(c) $\mathbb{P}(A \mid B) = 0{,}1$;

(d) $\mathbb{P}(B \mid A) = 0{,}4$.

Exercice 3.11 Un nouveau vaccin a été testé sur 12 500 personnes ; 75 d'entre elles, dont 35 femmes enceintes, ont eu des réactions secondaires nécessitant une hospitalisation.Parmi les 12 500 personnes testées, 680 personnes sont des femmes enceintes. On pioche une personne au hasard parmi les 12 500 personnes de l'étude.

1. Décrire l'espace de probabilité.
2. Quelle est la probabilité pour une femme enceinte, d'avoir une réaction secondaire si elle reçoit un vaccin ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne non enceinte d'avoir une réaction secondaire ?

Exercice 3.12 Dans une jardinerie : 25 % des plantes ont moins d'un an, 60 % ont de 1 à 2 ans, 25 % ont des fleurs jaunes, 60 % ont des fleurs roses, 15 % ont des fleurs jaunes et moins d'un an, 3 % ont plus de 2 ans et n'ont ni fleurs jaunes, ni fleurs roses. 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, ont des fleurs jaunes, 15 % de celles qui ont de 1 à 2 ans, n'ont ni fleurs jaunes ni fleurs roses. On suppose que les fleurs ne peuvent pas être à la fois jaunes et roses.

On choisit une plante au hasard dans cette jardinerie. Remplir le tableau suivant qui indique les probabilités de chaque catégorie de plante.

$\mathbb{P}[\,\cdot \cap \cdot\,]$	fleurs roses	fleurs jaunes	fleurs ni jaunes ni roses	total
moins de 1 an	.	15 %	.	25 %
entre 1 et 2 ans	.	.	.	.
plus de 2 ans	.	.	.	.
total	.	.	.	100 %