Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2023-2024**

L2 - Informatique | UE : Statistiques pour l'Informatique

Examen du 10 janvier 2024, durée 120 min

Les documents ne sont pas permis. Les calculatrices non-programmables sont permises. Le barème est indicatif.

Exercice 1 (6 pts.) Soit X une variable aléatoire qui prend les trois valeurs $1, 2, 5$. Soit Y une variable aléatoire qui prend les deux valeurs $0, 4$. Le couple suit une loi uniforme, c.à.d. $P(X = k, Y = l)$ est le même pour tout (k, l).

1. Déterminez les lois marginales de X et de Y.
2. Est-ce que les deux variables, X et Y, sont indépendantes ? Justifier votre réponse.
3. Quelle est la probabilité que $Y = 4$ sachant que X est impaire ?
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Z = X - Y$?
5. Déterminez l'espérance et la variance de Z.

Exercice 2 (4 pts.) La probabilité qu'une certaine machine tombe en panne à l'instant T suit une loi exponentielle de paramètre λ. On observe en moyenne 5 pannes par année.
On rappelle que la fonction de répartition de la loi exponentielle est $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, pour $t \geq 0$.

1. Donnez la formule pour $P(T \geq t)$, pour $t \geq 0$.
2. Montrer que $P(T \geq t + s) = P(T \geq t)P(T \geq s)$ pour $t, s \geq 0$.
3. Quelle est la probabilité que la machine fonctionne sans panne pendant au moins 2 ans.
4. Vous savez que la machine a fonctionné pendant 2 ans. Quelle est la probabilité que la machine fonctionne encore pour la 3ième année ?

Indication : $e^{-\frac{1}{5}} = 0.819$, $e^{-\frac{2}{5}} = 0.670$, $e^{-\frac{3}{5}} = 0.549$.

Exercice 3 (6 pts.) Dans une usine, les sachets de chips sont remplis à la machine. La valeur moyenne de la masse d'un sachet est de 150 grammes. Nous pouvons supposer que la valeur de la masse suit une distribution normale avec un écart-type de 2 grammes.

1. Soit X la variable aléatoire décrivant la masse d'un sachet. Soit Y la variable centrée réduite associée à X. Spécifier Y et donner sa loi.
2. Quelle est la probabilité qu'un sac tiré au hasard pèse moins que 148 grammes ?
3. Un échantillon de 6 sacs est tiré au sort. Soit Z la variable aléatoire décrivant le nombre des sacs dans l'échantillon qui pèsent moins de 148 grammes. Quelle est la loi de Z ?
4. Quelle est la probabilité qu'au plus un des sacs de l'échantillon pèse moins de 148 grammes ?

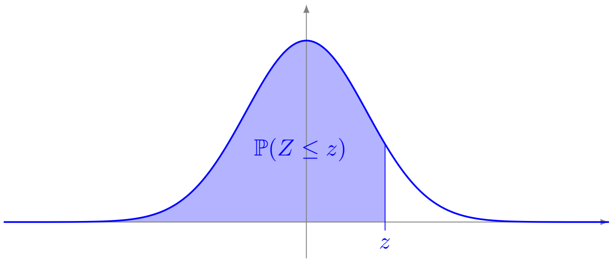
Exercice 4 (4 pts.) Dans une fouille les archéologues ont trouvé neuf poids, qui semblent représenter l'unité de la masse d'une ancienne civilisation. Pour obtenir la valeur de cette unité ils ont pesé les poids et ont trouvé (en gramme)

$$73, 69, 73, 74, 71, 73, 76, 68, 71$$

On fait l'hypothèse que la masse des poids suit une loi normale de μ et σ inconnus.

1. Déterminer la moyenne de l'échantillon.
2. Déterminer la variance sans biais de l'échantillon.
3. Utiliser la loi de Student pour déterminer l'intervalle de confiance à $\alpha = 0,2$ pour la moyenne μ.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Grandes valeurs de z :

z	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	4.0	4.5
$F(z)$	0.9987	0.99904	0.99931	0.99952	0.99966	0.99976	0.999968	0.999997

Loi de Student, $1 - \alpha = 0.8$

n	8	9	10	30
$t(n)_{0.1}$	1.40	1.38	1.37	1.31