Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre automne 2024-2025**

L2 - Informatique UE : Statistiques pour l'Informatique

Corrigé du Contrôle CP2 - 27/11/2024

durée 60 minutes

Les calculatrices sont permises en mode "examen". Les documents ne sont pas permis. Toute réponse doit être justifiée.

Exercice 1. Un générateur d'aléa fournie une suite de nombres -1 ou $+1$ d'une manière indépendante. Le nombre $+1$ apparait dans 20% des cas.

1. X désigne le premier nombre que le générateur d'aléa a fourni.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   1 pt. *X prend les valeurs -1 et $+1$ avec proba $P(X = 1) = \frac{1}{5}$, $P(X = -1) = \frac{4}{5}$.*

   (b) Soit $a, b \in \mathbf{R}$ t.q. $Y = aX + b$. Quelle est la loi de Y ?

   1 pt. *Y prend les valeurs $-a + b$ et $a + b$ avec proba $P(Y = a + b) = \frac{1}{5}$, $P(Y = -a + b) = \frac{4}{5}$. Si $a = 0$ alors $P(Y = b) = 1$.*

   (c) Comment choisir a et b pour que Y suive une des lois usuelles ?

   1 pt. *Pour que Y suive la loi de Bernoulli il faut qu'il prenne les valeurs 0 et 1. Donc si on pose $a = b = \frac{1}{2}$ alors $Y = \frac{1}{2}(X + 1)$ suit $\mathcal{B}(1, \frac{1}{5})$.*

   (d) Comment choisir m et s pour que $Z = \frac{X-m}{s}$ soit centré et réduit ?

   2 pt. *Il faut prendre $m = \mathbb{E}(X) = -\frac{4}{5}+\frac{1}{5} = -\frac{3}{5}$ et $s = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{4}{5}(-1 + \frac{3}{5})^2 + \frac{1}{5}(1 + \frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$.*

2. S désigne la somme des n premiers nombres que le générateur d'aléa a fourni.

   (a) Déterminez l'espérence et la variance de S.

   2 pt. *L'espérence est additive, donc $\mathbb{E}(S) = n\mathbb{E}(X) = -n\frac{3}{5}$. Comme le générateur produit les nombres d'une manière indépendents, la variance est additive et on a $\mathbb{V}(S) = n\mathbb{V}(X) = n\frac{16}{25}$.*

   (b) Comment choisir a et b pour que $aS + b$ suive une des lois usuelles ?

   1 pt. *$aS + b$ est la somme de n v.a.i. de même loi que $Y = aX + b$. Si on choisit $a = b = \frac{1}{2}$ alors Y suit $\mathcal{B}(1, \frac{1}{5})$. La somme de n v.a.i. de loi $\mathcal{B}(1, \frac{1}{5})$ suit $\mathcal{B}(n, \frac{1}{5})$ (résultat du cours). Donc $aS + b$ suit $\mathcal{B}(n, \frac{1}{5})$ si $a = b = \frac{1}{2}$.*

   (c) Specifier la variable centrée et réduite associée à S.

   1 pt. *Il faut prendre $m = \mathbb{E}(S) = -n\frac{3}{5}$ et $s = \sqrt{\mathbb{V}(S)} = \sqrt{n}\frac{4}{5}$. La variable centrée et réduite associée à S et donc $T = \frac{S+n\frac{3}{5}}{\sqrt{n}\frac{4}{5}}$.*

   (d) Par quelle loi peut-on approcher la loi de S si n est très grand ?

   2 pt. *Par le théorème central limite, on peut approcher T par la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc S peut être approché par la loi avec la même espérence et variance que S c.à.d. $\mathcal{N}(-n\frac{3}{5}, \sqrt{n}\frac{4}{5})$.*

3. S désigne la somme des 10000 premiers nombres que le générateur d'aléa a fourni.

   (a) Déterminez la probabilité que S prenne au plus la valeur 1600. Une précision à 4 chiffre après la virgule suffisera.

   2 pt. *On a $n = 10000$. $T = \frac{S+n\frac{3}{5}}{\sqrt{n}\frac{4}{5}} = \frac{S+6000}{80}$ est centré réduit. T peut donc être approché par la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On a $S \leq 1600$ ssi $T \leq \frac{7600}{80} = 95$. Comme T suit la loi normale, $P(T \leq 95) = 1$.*

Exercice 2. Dans une station de ski, en moyenne 100 skieurs par heures arrivent devant un lift.

1. Soit X la variable aléatoire qui dsigne le nombre de skieurs qui arrivent devant le lift en 1 minutes. Est-ce une variable discréte ou continue ?

   X prend les valeurs $\{0, 1, \cdots\}$ donc est discréte.

   (a) Quelle loi usuelle proposez-vous que X suive ?

   1.5pts. *La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$. En effet λ correspond a la moyenne ramenée à la minute.*

   (b) Déterminez la probabilité que X soit plus grand que sa moyenne.

   1.5 pts. *On cherche $P(X > \frac{5}{3}) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1 + \frac{5}{3})e^{-\frac{5}{3}} = 0.496$*

2. Soit T la variable aléatoire qui désigne le temps d'arrivé du premier skieur après un instant donné (par exemple 14h). Est-ce une variable discréte ou continue ?

   (a) Quelle loi usuelle proposez-vous que T suive ?

   1.5pts. *La loi d'exponential $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda = 100$ si vous mesurer le temps en heures, ou $\lambda = \frac{100}{60} = \frac{5}{3}$ si vous mesurer le temps en minutes.*

   (b) Déterminez la probabilité que T soit plus grand que sa moyenne.

   1.5 pts. *La moyenne étant $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100}$ heures $= 36$ secondes.*

   On cherche $P(X > \frac{1}{\lambda}) = \int_{\lambda^{-1}}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda\lambda^{-1}} = e^{-1} = 0.368$

Exercice 3. Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme (discrète) $\mathcal{U}(n)$.

1. Quelle est l'espérence de $X - Y$?

   1pt. *L'espérence est additive, donc $\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 0$, car X est Y suivent la même loi, donc ont la même espérence.*

2. Quelle est la variance de $X - Y$?

   1.5 pt. *Comme les variables sont indépendentes, la variance est additive, donc $\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(-Y)$. Or, $\mathbb{V}(-Y) = (-1)^2\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(Y)$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \frac{n^2-1}{12}$. D'où $\mathbb{V}(X - Y) = \frac{n^2-1}{6}$.*

3. Déterminez la loi du couple (X, Y) dans le cas $n = 3$.

   1.5 pt. *Comme les variables sont indépendentes, la loi de couple est donnée par $P(X = k, Y = l) = P(X = k)P(X = l)$ où $k, l \in \{1, 2, 3\}$.*

   Avec la loi uniforme $\mathcal{U}(3)$ ca donne $P(X = k, Y = l) = \frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ où $k, l \in \{1, 2, 3\}$.

4. Déterminez la loi de $X - Y$ dans le cas $n = 3$.

   1.5 pt. *$X - Y$ prend les valeur $m \in \{-2, -1, -0, 1, 2\}$. -2 si $X = 1, Y = 3$, -1 si $X = 1, Y = 2$ ou $X = 2, Y = 3$, etc.. Donc*

   $P(X - Y = -2) = P(X - Y = 2) = \frac{1}{9}$

   $P(X - Y = -1) = P(X - Y = 1) = \frac{2}{9}$

   $P(X - Y = 0) = \frac{3}{9}$

5. Quelle est la probabilité que $X > Y$ dans le cas $n = 3$?

   1 pt. *$X > Y$ ssi $X - Y < 0$. Donc*

   $P(X > Y) = P(X - Y = -2) + P(X - Y = -1) = \frac{3}{9}$