Cours Mathématiques 3 (MAT2012L) L2 PCSI 2024-2025

Léon Matar Tine [1]

Automne 2024

1. Université Claude Bernard Lyon 1

1. Introduction générale sur le cours
2. Espaces vectoriels
   - Définition, propriétés
   - Sous-espaces vectoriels
   - Familles génératrices, familles libres, bases
   - Applications linéaires
     - Définitions, propriétés
     - Image et noyau
   - Les matrices
     - Opérations sur les matrices
   - Matrice de passage
   - Matrice d'une application linéaire
   - Matrices inversibles
     - Matrices inversibles et bases
     - Matrices inversibles et matrices de passage
     - Matrices inversibles et applications linéaires
   - Déterminants
3. Systèmes d'équations linéaires
4. Réduction des endomorphismes

- Définition, propriétés
  - Vecteurs propres, valeurs propres
  - Sous-espaces propres
  - Polynôme caractéristique
  - Diagonalisation

Introduction

Ce cours de Mathématiques 3 est destiné aux étudiants de niveau licence 2 de la filière PCSI (Physique-Chimie et Sciences de l'ingénieur).
Trois chapitres sont développés dans ce cours

- Algèbre linéaire (Espaces vectoriels, Applications linéaires, Matrices, Déterminants, Systèmes linéaires, Réduction des endomorphismes, Espace vectoriel muni d'un produit scalaire : Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes),
- Suites et Séries numériques et de fonctions : Suites et séries numériques, Séries entières.
- Séries entières – Équations différentielles.

Les notions seront présentées dans un esprit pratique sans grand développement théorique.

L'UE compte pour 6 crédits. Deux contrôles continus (60% de la note) et un examen final (40% de la note) sont prévus.

Page de l'UE

https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a24:s3_maths3:page

Espaces vectoriels

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, qu'on peut additionner et multiplier par des scalaires.

Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

Définition 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et d'une loi de composition externe, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

On dit que E, muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(1) $(E, +)$ est un *groupe commutatif*, autrement dit :

- *commutativité* : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; (pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$) ;
- *associativité* : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$) ;
- *il existe un élément* $\vec{0}_E \in E$, appelé élément neutre, tel que $\vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$ (pour tout $\vec{u} \in E$) ;
- pour tout $\vec{u} \in E$, il existe $\vec{u}^* \in E$ vérifiant $\vec{u} + \vec{u}^* = \vec{0}_E$; l'élément $\vec{u}^*$ est appelé le symétrique ou l'opposé de u et est noté $-\vec{u}$.

(2) Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$;
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

$\square$

On appelle :

- Addition la loi de composition interne

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et multiplication par des scalaires la loi de composition externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

- Vecteurs les éléments de E ;
- Scalaires les éléments de $\mathbb{K}$;
- Vecteur nul le vecteur $\vec{0}_E$.

Exemple 1

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 2

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De même, sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{C}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (P, Q) & \mapsto & P + Q \end{array} \quad \text{où } (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto & \lambda P \end{array} \quad \text{où } (\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Son vecteur nul est le polynôme nul.

De même, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Propriétés (Règles de calcul)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E)$;
- $\lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda - \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{u}$;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

Propriété Importante

$\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}_E$

Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subseteq E$.
On peut se poser la question de savoir quand est-ce que F, quand il est muni par l'addition de E et la multiplication par des scalaires, est lui-même un espace vectoriel.

Il s'avère qu'il suffit que F soit stable par l'addition et la multiplication par les scalaires.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$, $\vec{u} + \vec{v} \in F$;
- pour tout $\vec{u} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{u} \in F$.

Dans ce cas F, muni de l'addition et de la multiplication par des scalaires,

$$\begin{array}{rcl} F \times F & \to & F \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda\vec{u} \end{array}$$

est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Abréviation

Sous-espace vectoriel= s.e.v

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ces deux propriétés sont satisfaites

- $\vec{0} \in F$;
- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Preuve

Supposons que F soit un s.e.v de E. Alors comme F n'est pas vide, il contient un vecteur $\vec{u}$. Alors $-\vec{u} \in F$ et $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in F$.
Pour la seconde propriété, soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda\vec{u} \in F$ et donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.
Exercice : montrer l'implication réciproque. $\square$

Exemples immédiats : E et $\{\vec{0}\}$ sont des s.e.v de E.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un s.e.v. En effet toute droite passant par l'origine a comme équation $ax + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et on vérifie aisement qu'il s'agit bien d'un s.e.v (exercice).

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que $\mathcal{P}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{P}$ passe par l'origine, on a $\vec{0} \in \mathcal{P}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \text{ et } ax + by + cz = 0,\ ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$.

Exercice

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \;\; (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit $C^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des applications de classe C^1

$$C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$

Montrer que $C^1(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Notation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est définie par

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Par exemple, si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des sous-ensembles de E, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in F_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de E.

Preuve

- (Pour tout $i \in I$, $\vec{0} \in F_i$) $\implies \vec{0} \in \bigcap_{i\in I} F_i$;
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in I$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F_i$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$. $\square$

Corollaire 1

- Si F et G sont des s.e.v, alors leur intersection $F \cap G$ est un s.e.v.
- Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des s.e.v, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est un s.e.v.

Exemple

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de $\mathbb{R}^3$ passants par l'origine. Alors leur intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, qui est une droite, est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(U est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$, V est la droite vectorielle dirigée par $\vec{v}$.)
Alors U et V sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ (exercice).

Familles génératrices, familles libres, bases

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E. Alors on peut fabriquer de nouveaux vecteurs en combinant les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Un tel nouveau vecteur est appelé une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Plus généralement ...

Définition 4

Soient $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteur

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

est bien une combinaison linéaire des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

car $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Donc $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit s.e.v de E contenant A. Il est unique et on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par A. On le note $Vect(A)$.

Preuve

E est un s.e.v de E contenant A. Donc il existe des s.e.v de E qui contiennent A. L'intersection F de ces s.e.v est un s.e.v de E contenant A. Il est le plus petit s.e.v qui contient A. En effet, si $A \subseteq H$, où H est un s.e.v de E, alors $F \subseteq H$. $\square$

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, autrement dit

$$Vect(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i \ \mid \ n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A \right\}.$$

Remarque

Donc un vecteur $\vec{u} \in E$ est dans $Vect(A)$, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $U = Vect(\{\vec{u}\})$ et $V = Vect(\{\vec{v}\})$.

Exercice

Montrer que $U + V = Vect(U \cup V)$.

Définition 5

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- On dit que S est une partie génératrice de F si

$$F = Vect(S).$$

- On dit que S est libre, ou que les vecteurs de S sont linéairement indépendants, si

$$\text{pour tous } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ pour tous } \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in S,$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_2 \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que S est une base de E, si elle est génératrice et libre.

Exemples

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace vectoriel F engendré par les deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  vérifie $Vect(\vec{u}, \vec{v}) = Vect(\vec{u}, 2\vec{u}) = Vect(\vec{u})$ et donc la famille $\{\vec{u}\}$ est génératrice de F.

- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{R}^3 = Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Théorème 1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si B_1 et B_2 sont deux bases, alors il existe une bijection entre B_1 et B_2.

Définition 6

On dit d'un $\mathbb{K}$-e.v E qu'il est de dimension finie s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ où pour $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à n, la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \ldots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient L une partie libre et G une partie génératrice de E. Alors on peut compléter L par des éléments de G pour former une base de E.

Autrement dit, il existe $F \subseteq G \setminus L$ tel que $L \cup F$ soit une base de E.

Théorème de la base incomplète(version en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille libre de E et soit $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_m\}$ une famille génératrice de E. Alors il existe $\vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}$ de $\mathcal{G}$ telle que la famille $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}\}$ forme une base de E.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Alors :

- Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Proposition 5

Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

Exemple récapitulatif

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{U}$ des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{U}$ est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Alors

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $\alpha = \beta$ et $5\alpha = 0$. Par conséquent $\alpha = \beta = 0$.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

suite de l'exemple

On peut compléter la famille libre $\mathcal{U}$ par des éléments de *la base canonique* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ pour former une base de E.
On peut choisir par exemple $\vec{e}_1$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_1 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\gamma = -5\alpha$ et $\alpha = \beta$. Par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ n'est pas libre.
Choisisons $\vec{e}_2$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_2 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est une famille libre constituée de trois vecteurs, elle forme une base.

Définition 7

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

qui sont appelés les composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Applications linéaires

Applications linéaires : Définitions, propriétés

Définition 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Applications linéaires : Exemples

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \to E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire. En effet, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = f(\lambda x+x', \lambda y+y') = \Big((\lambda x+x')-(\lambda y+y'), (\lambda x+x')+(\lambda y+y')\Big)$$

$$(\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) + (x' - y', x' + y') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 3

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. L'application

$$D : E \to E,\ D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} D(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)' \\ &= \lambda f' + g' \\ &= \lambda D(f) + D(g). \end{aligned}$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 4

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire. En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \; R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

et donc

$$R(\vec{u}+\vec{v}) = R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x+x')\cos\theta \; - (y+y')\sin\theta \\ (x+x')\sin\theta \; + (y+y')\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta \; - y\sin\theta \\ x\sin\theta \; + y\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'\cos\theta \; - y'\sin\theta \\ x'\sin\theta \; + y'\cos\theta \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a $R(\lambda\vec{u}) = \lambda R(\vec{u})$.

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E, F)$, munit des opérations

$$(f, g) \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x); \quad (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. $\square$

Applications linéaires

Définition 9

- Une application linéaire de E dans E est appelé un endomporphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

Applications linéaires : Image et noyau

Rappel

Soit $f : E \to F$ une application.

- L'image directe par f d'une partie $A \subseteq E$ est :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image réciproque d'une partie $B \subseteq F$ est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Applications linéaires : Image et noyau

Proposition 8

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si H est un s.e.v de E, alors $f(H)$ est un s.e.v de F.
- Si G est un s.e.v de F, alors $f^{-1}(G)$ est un s.e.v de E.

Applications linéaires : Image et noyau

Définition 10

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle :

- Image de f, le s.e.v de E :

$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

- Noyau de f, le s.e.v de E :

$$Ker(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire (Exercice). On a $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ et $Im(f) = \mathbb{R}^2$. En effet :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$ et $x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x - y = a$ et $x + y = b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{b-a}{2}$.

Applications linéaires : Image et noyau

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ une base de E. Alors $Im(f) = Vect(f(\vec{u}_1), \cdots, f(\vec{u}_n))$.

Proposition 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $Ker(f) = \{\vec{0}\}$;
- Pour tout $\vec{u} \in E$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- Im(f)=F.

Applications linéaires : Image et noyau

Définition 11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de Im(f) est appelée le rang de f et est notée $rg(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = rg(f) + dim(Kerf(f)).$$

Applications linéaires : Rappel terminologie

Terminologie à retenir

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.

Matrices

Les matrices

Définition

On appelle matrice tout tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$).

- On note
$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$
a_{ij} est le coefficient : intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- M est dite de taille $n \times m$ (elle a n lignes et m colonnes).

Les matrices

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (mais dans $\mathbb{C}$ aussi) ; B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Les matrices

Définition

On dit que M est une matrice

- colonne si elle a une seule colonne ($m = 1$).
- ligne si elle a une seule ligne ($n = 1$).
- carrée si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ($n = m$).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} i & 3 & 5 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée
B est une matrice ligne
C est une matrice colonne

Les matrices

Remarques & notations

- Une matrice à n lignes et m colonnes est aussi appelée matrice de type (n, m) ou encore matrice $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

Remarques & notations

- La matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.
  Exemple :
  $$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- La matrice nulle $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
  Exemple :
  $$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Définition 6 (Somme de deux matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la somme $A + B$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Remarque

On ne somme que des matrices de même taille.

Opérations sur les matrices

Définition (Multiplication par un scalaire)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice λA, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}; \; \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Proposition 4

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices $(A, B) \mapsto A + B$ et de la multiplication par des scalaires $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \times m$.
Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle $O_{n,m}$.

Opérations sur les matrices

Exemple & exercice

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on considère la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Opérations sur les matrices

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m}$ une matrice $p \times m$.
Le produit de A et B est la matrice $n \times m$, notée $A \cdot B$, dont les coefficients c_{ij} sont définis par : c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Opérations sur les matrices

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

Opérations sur les matrices

Exemple

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 0+2\times 1 & 1\times 2+2\times 2 \\ 3\times 0+4\times 1 & 3\times 2+4\times 2 \\ 5\times 0+6\times 1 & 5\times 2+6\times 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Remarques

(1) Pour que le produit de A par B ait un sens if faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B.
(2) Le produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, m) est une matrice de type (n, m).

Opérations sur les matrices

Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ et $A \cdot B = O$ n'implique pas forcément $A = O$ ou $B = O$ (O désigne la matrice nulle).

(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Opérations sur les matrices

Propriétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Opérations sur les matrices

Notations & conventions

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

Opérations sur les matrices

Remarque

On a

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et si $AB \neq BA$ alors

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Proposition 5 (Formule du binôme pour les matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$.
Alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Matrice de passage

Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$ ayant comme composantes dans la base $\mathcal{B}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. (Donc $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$).

On appelle matrice des composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Matrice de passage

Définition (suite)

Plus généralement, soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice des composantes de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1), \ldots, M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_m)$.
Elle est notée $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$.

Matrice de passage

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, la matrice carrée $n \times n$, $M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$.

Elle est notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

Donc c'est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

C'est donc la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\vec{f}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n.$$

Matrice de passage

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Les composantes de $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans $\mathcal{B}_1$ sont (exercice)

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\,; \ \vec{r} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice de passage

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}).$$

Matrice de passage

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}),\ \mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{f} = \vec{w} + \vec{r}$ et calculons ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On appelle matrice de f, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)).$$

Elle est notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Matrice d'une application linéaire

Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

On a

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ f(\vec{u}_2) = (2, -1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

$$f(\vec{u}_3) = (-1, 0) = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Proposition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v (de dimension finie) munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u})) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(\vec{u}).$$

Remarque

Autrement dit, si Y désigne la matrice colonne des composantes de $f(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{C}$ et X désigne la matrice colonne des composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$Y = AX, \quad \text{où } A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Matrice d'une application linéaire

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, par rapport aux bases canoniques,

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, x-y),\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension respectives n et m. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ une base de F.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. L'application linéaire associée à A, relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, est l'application définie par : au vecteur $\vec{u} \in E$ de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, elle associé le vecteur $\vec{v}$ dont les composantes $(y_1, \cdots, y_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont données par

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire associée à A, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème

Soit E (respectivement F) un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n (respectivement m), muni d'une base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$). L'application

$$\mathcal{M} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K});\ f \mapsto \mathcal{M}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

Remarque

Donc fondamentalement en dimension finie, une fois que les bases sont fixées, il n'existe pas de différence réelle entre applications linéaires et matrices.

Matrice d'une application linéaire

Proposition

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Matrices inversibles

Matrices inversibles

Définition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
Cette matrice est alors unique, est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A et B sont inversibles, il en de même de $A \cdot B$ et on a

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Matrices inversibles et bases

Matrices inversibles et bases

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est inversible.

Matrices inversibles et bases

Exemple

Soit $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Considérons la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{v} = \vec{e}_2, \quad \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre car la matrice

$$M_{Can}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (exercice).

Matrices inversibles et matrices de passage

Matrices inversibles et matrices de passage

Proposition

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$; autrement dit

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Matrices inversibles et matrices de passage

Exemple

Considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà calculé :

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles et applications linéaires

Matrices inversibles et applications linéaires

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F.

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ est inversible.

On a alors

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f^{-1}).$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.
Sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(x, y) = (a, b) \text{ si et seulement si } x = \frac{a+b}{2},\ y = \frac{b-a}{2}$$

et donc $f^{-1}(a, b) = (\frac{a+b}{2},\ \frac{b-a}{2})$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles et applications linéaires

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

Déterminants

Déterminants

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est la quantité

$$ad - bc.$$

On note

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 1 \times 5 = 11.$$

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n-1$. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Déterminants

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 0 = -33.$$

Déterminants

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E. On définit

$$det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = det(M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)).$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E.
- $det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

et donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$. On a alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Déterminants

Quelques propriétés des déterminants

- Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.
- La permutation de deux colonnes (resp. de deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes) est nul.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (resp. une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

Systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires

Les systèmes linéaires interviennent dans diverses branches des mathématiques, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes issus des autres domaines, comme la physique, la mécanique, l'économie, le traitement du signal, ...

Ils peuvent être considérés comme la "base calculatoire" de l'algèbre linéaire. Ils sont au coeur du traitement d'une grande partie des problèmes issus de l'algèbre linéaire en dimension finie. Par exemple, ils permettent de déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou non, ...

Systèmes d'équations linéaires

Exemples de la géométrie euclidienne

- Dans le plan (Oxy), l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by = c,$$

où a, b et c sont des réels.

- Considérons deux droites : $\mathcal{D}_1$ d'équation $ax + by = c$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $dx + ey = f$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, si et seulement si, il est solution du système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Remarquons que trois cas se présentent :

  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en un seul point : (S) a une unique solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Systèmes d'équations linéaires

Dans l'espace $(Oxyz)$, l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite : (S) a une infinité de solutions
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Systèmes d'équations linéaires

On appelle système linéaire de n équations et à m inconnues $x_1, \ldots, x_m$, tout système de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{im}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

où $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

- Les nombres a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sont les coefficients du système (S).
- Le n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ est le second membre du système (S).

Systèmes d'équations linéaires

Exemples

(1) Pour $n = 1$, on obtient une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b.$$

(2) Équation d'une droite dans le plan : $ax + by = c$.
(3) Systèmes à 2 équations et 2 inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{cases}$$

(4) Le système

$$(S) \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

a comme second membre $(1, 1, 1)$.

Systèmes d'équations linéaires

(1) La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est appelée la matrice du système (S). Elle sera notée A_S.

(2) Si le second membre du système est nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est homogène.

Systèmes d'équations linéaires

Exemples

(1) Soit (S) le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$.

(2) Le système

$$(S) \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

est homogène.

Écriture matricielle

Systèmes d'équations linéaires

Soit (S) un système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

$A = A_S = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ sa matrice et $(b_1, \ldots, b_n)$ son second membre. En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$A \cdot X = B.$$

Exemple

Soit (S) le système (S) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = 10. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x + 9y = 1, \\ 3x - 2y = 3, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 3, 1)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Systèmes d'équations linéaires : Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soient $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ munis respectivement des bases canoniques.

Soit (S) un système linéaire de n équations et m inconnues de matrice A.

Alors on peut associer canoniquement une application linéaire f à (S) définie sur $\mathbb{K}^m$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$: c'est l'application linéaire associée à A (relativement aux bases canoniques)

$$f(x_1, \ldots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, (S) est équivalent à

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et à m inconnues.

- Une solution de (S) est un m-uplet $(s_1, \ldots, s_m)$ tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, $\cdots$, s_n pour x_n, dans (S) on obtient une égalité.
- L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble de toutes les solutions de (S).
- On dit que (S) est compatible si (S) admet des solutions.

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Proposition

Soit (S) un système linéaire homogène de n équations à m inconnues. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Preuve

En utilisant l'application linéaire f associée à (S), on a

$$(s_1, \ldots, s_m) \text{ est une solution de } (S) \text{ si et seulement si } f(s_1, \ldots, s_m) = \vec{0}$$

$$\text{si et seulement si } (s_1, \ldots, s_m) \in Ker(f).$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est le noyau de f. Comme ce dernier est un $\mathbb{K}$-e.v., il en est de même de l'ensemble des solutions de (S). $\square$

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Proposition

Soit (S) un système linéaire de n équations à m inconnues. Si $\vec{s}$ est une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\vec{s} + Ker(f) = \{\vec{s} + \vec{h} \mid \vec{h} \in Ker(f)\},$$

où f est l'application linéaire associée à (S).

Preuve

Soit $\vec{x}$ une solution de (S). Alors $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où $\vec{b}$ est le vecteur représenté par le second membre de (S). On a $f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$ et donc $\vec{x} - \vec{s} \in Ker(f)$. D'où $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s}) \in \vec{s} + Ker(f)$. Inversement, si $\vec{x} = \vec{s} + \vec{h}$, avec $\vec{h} \in Ker(f)$, alors $f(\vec{x}) = f(\vec{s} + \vec{h}) = \vec{b} + f(\vec{h}) = \vec{b}$ et donc $\vec{x}$ est solution de (S). $\square$

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Proposition

Tout système d'équations linéaires possède ou bien aucune solution, ou bien une seule solution, ou bien une infinité de solutions.

Preuve

Soit $f(\vec{x}) = \vec{b}$ l'interprétation à l'aide d'une application linéaire de (S). Un des cas suivants se présentent :

- $\vec{b} \notin Im(f)$: (S) n'a pas de solutions
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) = \{\vec{0}\}$: (S) a une unique solution
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) \neq \{\vec{0}\}$: (S) a une infinité de solutions

$\square$

Systèmes d'équations linéaires : Existence des solutions

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{K}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au rang de l'application linéaire qui lui est associée. En effet, si f est l'application linéaire associée à A

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(Vect(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_m)))$$

or on vérifie que

$$f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i = \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Systèmes d'équations linéaires : Existence des solutions

Définition

- Soit A une matrice de type (m, n). On appelle matrice extraite de A, toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A.
- On appelle déterminant extrait de A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème (Calcul pratique du rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible de type (r, r). $\square$

Systèmes d'équations linéaires : Existence des solutions

Exemples

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$.

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc on ne peut pas extraire une matrice d'ordre 3 inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ extraite de A possède un déterminant non nul ; d'où $rg(A) = 2$.

Définition

Soit (S) un système de n équations à m inconnues de matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$ et de second membre $\vec{b}$.

- Le rang de (S) est par définition le rang de sa matrice :

$$rg(S) = rg(A).$$

- La matrice augmentée de (S) est la matrice, notée $[A|\vec{b}]$, définie par :

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour bien distinguer le second membre $\vec{b}$ de A et pour des raisons pratiques de calculs, on écrit $[A|\vec{b}]$ sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x + 7y + 5z = 1, \\ 3x + 2y - 6z = 11, \\ x - y + 9z = 0. \end{cases}$

Alors la matrice du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. Donc $[A|\vec{b}]$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 11 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Systèmes d'équations linéaires : Existence des solutions

Proposition (CNS pour l'existence des solutions)

Soit (S) un système d'équations linéaires, de matrice A et de second membre $\vec{b}$. Alors (S) est compatible, si et seulement si, $rg(A) = rg([A|\vec{b}])$.

Systèmes d'équations linéaires : Existence des solutions

Exemple

Soit (S) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2y+3z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$ Alors la matrice du système est

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$. La matrice augmentée de (S) est

$[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Son rang ne peut être 4 et comme A est une matrice extraite de rang 3 ; $\text{rg}([A|\vec{b}]) = 3$. Donc (S) est compatible (admet des solutions).

Méthode du pivot de Gauss

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

La méthode de pivot de Gauss consiste à transformer un système, en utilisant des "opérations élémentaires", à un système échelonné réduit. Il se trouve que les systèmes échelonnés réduits sont plus faciles à résoudre.

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

Définition 9

Les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice) sont appelées des opérations élémentaires :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier l'équation L_i par le scalaire non nul λ.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$: rajouter à l'équation L_i, l'équation L_j multipliée par le scalaire λ.
- $L_i \leftrightarrow L_j$: permuter les deux équations L_i et L_j.

Propriété

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système. Ils transforment un système linéaire à un autre systèmes ayant le même ensemble de solutions.

Mise en pratique

Étape 1 : échelonnement

- Il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Si ce n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 par la première ligne dont le premier coefficient est non nul : $L_1 \leftrightarrow L_j$.
- Si le premier coefficient de la première ligne est différent de 1, on multiplie L_1 par $1/a_{11}$: $L_1 \leftarrow 1/a_{11}L_1$. Nous avons un pivot en position $(1,1)$.
- Le pivot sert à éliminer tous les autres termes sur la même colonne : pour $2 \leq i \leq n$, on remplace l'équation L_i par $L_i - a_{i1}L_1$, on élimine ainsi x_1 dans l'équation L_i.

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

On obtient un système avec une équation L_1 contenant x_1 et les autres équations ne contenant pas de x_1 :

$$(S') \begin{cases} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ 0 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{cases}$$

On aboutit ainsi à un nouveau système, on recommence les étapes ci-dessus pour éliminer x_2 :

$$(H) \begin{cases} a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{cases}$$

Exemple

Soit

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{9} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Étape 2 : réduction

En partant de la dernière ligne et en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot, on applique la même méthode que celle de l'étape d'échelonnement, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Étape 3 : resolution

Maintenant le système est échelonné et réduit, sa résolution est plus simple.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée réduite obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\begin{cases} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{cases}$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.

Exemple 2

Considérons le système

$$(S) \quad \begin{cases} -y + 2z + 13t = 5 \\ x - 2y + 3z + 17t = 4 \\ -x + 3y - 3z - 20t = -1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Exemple 2

Pour réaliser la réduction, on remonte à partir de la dernière ligne en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Exemple 2

Le système (S) est maintenant équivalent à

$$\begin{cases} x - 4t = -2 \\ y - 3t = 3 \\ z + 5t = 4 \end{cases}$$

où x, y, z sont les variables principales et t est la variable secondaire (ou paramètre). L'ensemble des solutions est

$$\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2 + 4\lambda, y = 3 + 3\lambda, z = 4 - 5\lambda, t = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= (-2, 3, 4, 0) + Vect\Big((4, 3, -5, 1)\Big).$$

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si A est une matrice carrée inversible de type (n, n) et B est l'inverse de A, alors

$$AB = I_n$$

Si $B_1, \ldots, B_n$ sont les colonnes de B , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e}_i, i = 1, ..., n.$$

Donc calculer B revient à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice A.
Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Systèmes de Cramer

Systèmes de Cramer

Définition

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si la matrice A de ce système est inversible.

Systèmes de Cramer

Proposition

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit B, le système (S) admet une solution et une seule.
- Quel que soit B, le système (S) admet au moins une solution.
- Quel que soit B, le système (S) admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système (S) n'admet que la solution triviale.
- La matrice A du système (S) est inversible.
- $det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (S) est alors $X = A^{-1}B$.

Systèmes de Cramer

Proposition (Règle de Cramer)

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre B.

Supposons que (S) est de Cramer (donc $det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de (S) est donnée par

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Systèmes de Cramer

Exemple

Soit (S) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$ écrit sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

Donc (S) est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9}{1} = 9, \; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4.$$

Réduction des endomorphismes

Réduction des endomorphismes

Rappel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme.
- L'espace vectoriel des endomorphismes est noté $End(E)$.

Réduction des endomorphismes

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in End(E)$. On se fixe une base $\mathcal{B}$ de E.

On considère la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}$: *on prend la même base pour E comme ensemble de départ que pour E comme ensemble d'arrivée.*

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ et les composantes de chaque $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{Can},$$

$$f(\vec{e}_2) = (0, 1) = (2, 4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{Can}.$$

Donc

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Réduction des endomorphismes

Si on considère maintenant $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2,1), \quad \vec{v} = (1,1)$$

alors

$$f(\vec{u}) = f(2,1) = (4,2) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = f(1,1) = (3,3) = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Réduction des endomorphismes

On voit que les deux matrices de f, par rapport aux différentes bases Can et $\mathcal{B}$

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont très différentes.
La dernière matrice est plus simple.

Réduction des endomorphismes

La matrice associée à un endomorphisme f dépend de la base choisie : pour deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, les matrices $M_{\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ ne sont pas forcément identiques.

L'objectif de la réduction d'un endomorphisme, c'est de trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elles sont simples : la somme, la multiplication, la puissance n-ème, ... etc, se ramène à des opérations simples.

Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_p \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p\beta_p \end{pmatrix}$$

Réduction des endomorphismes

Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}.$$

Réduction des endomorphismes : Définition, propriétés

Définition

On dit d'un endomorphisme f qu'il est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Alors, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (1, 1)$$

la matrice de f est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc f est diagonalisable.

Réduction des endomorphismes : Définition, propriétés

Comment peut-on définir la diagonalisation d'une matrice ?

Réduction des endomorphismes : Définition, propriétés

Rappel

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'application linéaire associée à A est définie par

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad f_A(x_1, \cdots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que A est la matrice de f_A par rapport à la base canonique : $M_{Can}(f_A) = A$.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation

On définit maintenant la diagonalisation d'une matrice en utilisant son application linéaire associée ...

Définition

On dit d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'elle est diagonalisable, si l'application linéaire qui lui est associée est diagonalisable.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation

Rappelons que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A = M_{Can}(f) = P_{Can,\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot P_{\mathcal{B},Can}$$

et $P_{\mathcal{B},Can} = P_{Can,\mathcal{B}}^{-1}$.

Donc en particulier, si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Inversement, supposons que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et P est inversible.
Si on prend pour $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ où $\vec{u}_i$ est le i-ième vecteur colonne de la matrice P ; comme P est inversible, $det(P) \neq 0$, $\mathcal{B}$ est une famille libre et est donc une base de $\mathbb{K}^n$.
Donc en particulier, P est la matrice de passage de Can à $\mathcal{B}$ et D est la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$.

Donc A est diagonalisable.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation

Définition

On dit que la matrice A est semblable à B s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Donc on avait montré la proposition importante suivante :

Proposition

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarques (en pratique)

- Si A est diagonalisable et si $\mathcal{B}$ est la base dans laquelle A (ou l'application linéaire qui lui est associée) est représentée par une matrice diagonale D alors

$$A = PDP^{-1}$$

où $P = P_{Can,\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique Can à $\mathcal{B}$.

- Diagonaliser une matrice carrée A revient à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On cherche une base $\mathcal{B}$, dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale D et on prend P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation

Comment peut-on, en pratique, trouver une telle matrice diagonale D ?

Pour cela, quelques notions sont nécessaires ...

Vecteurs propres, valeurs propres

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

Définition (Vecteurs propres, valeurs propres)

Soit $f \in End(E)$.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de f si :
  - $\vec{u} \neq \vec{0}$,
  - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $\vec{u} \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f, l'unique scalaire λ vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est appelé la valeur propre associée à $\vec{u}$.

Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f, alors pour tout scalaire α non nul, $\alpha\vec{u}$ est un vecteur propre de f.
En effet,

$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) = \alpha\lambda\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u}).$$

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

On définit les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices, en utilisant les applications linéaires associées.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de A s'il est pour l'application linéaire associée.
- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si elle l'est pour l'application linéaire associée.

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

Cela revient à dire :

- Un vecteur $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ est un vecteur propre de A si $\vec{u} \neq 0$ et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

Proposition

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Preuve

Si f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. D'où $\vec{u}_i$ est un vecteur propre.

Réciproquement, si E admet une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ formée de vecteurs propres de f, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe λ_i tel que $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. Donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et f est diagonalisable. $\square$

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

La traduction de la proposition 1 pour les matrices :

Proposition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi elle possède n vecteurs propres formant une base de $\mathbb{K}^n$.

Sous-espaces propres

Réduction des endomorphismes : Sous-espaces propres

Rappel

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Réduction des endomorphismes : Sous-espaces propres

Plus généralement, soient $U_1, \ldots, U_m$, des s.e.v de E. On dit que E est la somme directe de $U_1, \ldots, U_m$ et on écrit $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ si :

- $E = U_1 + U_2 \cdots + U_m = \{\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_i \in U_i\}$,
- pour tout $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \ldots, \vec{u}_m \in U_m$:

$$\text{si } \vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m = \vec{0} \text{ alors } \vec{u}_i = \vec{0} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m.$$

Propriété

Soient $U_1, \ldots, U_m$, des s.e.v de E. Pour chaque $1 \leq i \leq m$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de U_i. Alors E est la somme directe de $U_1, \ldots, U_m$, si et seulement si, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ est une base de E.

Réduction des endomorphismes : Sous-espaces propres

Définition

Soit f un endomorphisme de E et soit λ une valeur propre de f. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ de f, le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}.$$

Réduction des endomorphismes : Sous-espaces propres

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A, on définit d'une façon similaire le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de A

$$E_\lambda(A) = \{\vec{u} \in E \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}.$$

Réduction des endomorphismes : Sous-espaces propres

Proposition

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Autrement dit, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

Réduction des endomorphismes : Sous-espaces propres

Corollaire

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_m}(f)).$$

Corollaire

Si $\dim(E) = n$ et f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Polynôme caractéristique

Réduction des endomorphismes : Polynôme caractéristique

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Alors $P_A(X)$ est un polynôme de degré n, appelé le polynôme caractéristique de A.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X) - 12 = X^2 - 3X - 10.$$

Réduction des endomorphismes : Polynôme caractéristique

Soit $f \in End(E)$. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$. On a

$$\det(M_{\mathcal{B}_1}(f) - XI_n) = \det(P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P - XI_n)$$

$$= \det(P^{-1}(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n)P) = \det(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n).$$

Cela permet de définir :

Définition

Soit $f \in End(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On définit le polynôme caractéristique de f par :

$$P_f(X) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

(Donc il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$).

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de A, si et seulement si, λ est racine du polynôme caractéristique de A.

Preuve

- Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$. Donc $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, alors $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc λ est une valeur propre.

$\square$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 5 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X).$$

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2.

Rappel sur les polynômes

- Une racine λ d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, est une racine de multiplicité m si $(X-\lambda)^m$ divise $P(X)$ mais $(X-\lambda)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.
- Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, de degré n, est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$, s'il peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_p)^{m_p}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (et $m_1 + \cdots + m_p = n$).

Exemple

(1) Soit

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Alors

$$P(X) = (X-1)^2(X-3).$$

La multiplicité de la racine $\lambda_1 = 1$ est 2 et la multiplicité de la racine $\lambda_2 = 3$ est 1. On voit aussi que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais aussi dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) Le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car il n'admet pas de racine réelle. Par contre il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X - j)(X - \bar{j})$ où $j = e^{i\pi/3}$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.

- La multiplicité algébrique de λ est la multiplicité de λ comme racine de $P_A(X)$.
- La multiplicité géométrique de λ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

Diagonalisation

Théorème (CNS pour la diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$: dans ce cas

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

  où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres ; m_i est la multiplicité algébrique de λ_i.
- Pour chaque valeur propre λ_i, sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique : $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation–mise en pratique

- On calcule le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
- On cherche les racines de $P_A(X)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, et les multiplicités algébriques $m_1, \ldots, m_p$.
  - Si $P_A(X)$ n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
  - Si $P_A(X)$ est scindé, on cherche les bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$. Si pour chaque i, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$, alors A est diagonalisable :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

où chaque λ_i est répété m_i-fois.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation–mise en pratique

Dans ce cas, si $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(A)$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A. On a alors $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -3 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 13.$$

Le discriminant est strictement négatif et donc $P_A(X)$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$. Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

et donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation–Exemples

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P_A(X)$ admet deux racines distinctes, A est diagonalisable (on applique ici le corollaire 2). La matrice diagonale est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$$E_{\lambda_1}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = Vect((2,1))$$

$$E_{\lambda_2}(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = Vect((1,1)).$$

En posant $\vec{u} = (2,1), \vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique : on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)(4-X)^2.$$

Donc A possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus P_A est scindé.

2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, par la méthode de Gauss par exemple, on obtient $E_2(A) = Vect(\vec{u}),$ où $\vec{u} = (1, -2, 1)$.
De même
$E_4(A) = Vect(\vec{v}, \vec{w}),$ où $\vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1)$.
Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est 2.

3. Diagonalisabilité : comme P_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique, A est diagonalisable.
4. Diagonalisation : on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ A = PDP^{-1}.$$