Cours Mathématiques 3 (MAT2012L) L2 PCSI 2024-2025

Léon Matar Tine [1]

Automne 2024

1. Université Claude Bernard Lyon 1

- Définition, propriétés
  - Vecteurs propres, valeurs propres
  - Sous-espaces propres
  - Polynôme caractéristique
  - Diagonalisation
  - Théorème de Cayley-Hamilton

5. Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes
   - Produit scalaire
     - Produit scalaire réel
     - Produit scalaire complexe
     - Propriétés géométriques
     - Orthogonalité
     - Projection orthogonale
     - Bases orthonormées, orthonormalisation
     - Orthonormalisation de Gram-Schmidt

6. Suites et séries numériques
   - Suites numériques

Introduction

Ce cours de Mathématiques 3 est destiné aux étudiants de niveau licence 2 de la filière PCSI (Physique-Chimie et Sciences de l'ingénieur).
Trois chapitres sont développés dans ce cours

- Algèbre linéaire (Espaces vectoriels, Applications linéaires, Matrices, Déterminants, Systèmes linéaires, Réduction des endomorphismes, Espace vectoriel muni d'un produit scalaire : Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes),
- Suites et Séries numériques et de fonctions : Suites et séries numériques, Séries entières.
- Séries entières – Équations différentielles.

Les notions seront présentées dans un esprit pratique sans grand développement théorique.

L'UE compte pour 6 crédits. Deux contrôles continus (60% de la note) et un examen final (40% de la note) sont prévus.

Page de l'UE

https://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=a24:
s3_maths3:page

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Espace vectoriel

Un espace vectoriel est un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, qu'on peut additionner et multiplier par des scalaires.

Pour que ceci ait un sens, l'addition et la multiplication par des scalaires doivent satisfaire certaines propriétés.

Définition 1

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

et d'une loi de composition externe, autrement dit d'une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

On dit que E, muni de ces opérations, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si :

(1) $(E, +)$ est un *groupe commutatif*, autrement dit :

- *commutativité* : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; (pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$) ;
- *associativité* : $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$) ;
- *il existe un élément* $\vec{0}_E \in E$, appelé élément neutre, tel que $\vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$ (pour tout $\vec{u} \in E$) ;
- pour tout $\vec{u} \in E$, il existe $\vec{u}^* \in E$ vérifiant $\vec{u} + \vec{u}^* = \vec{0}_E$; l'élément $\vec{u}^*$ est appelé le symétrique ou l'opposé de u et est noté $-\vec{u}$.

(2) Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$;
- $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$;
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

$\square$

On appelle :

- Addition la loi de composition interne

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

  et multiplication par des scalaires la loi de composition externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda \cdot \vec{u} \end{array}$$

- Vecteurs les éléments de E ;
- Scalaires les éléments de $\mathbb{K}$;
- Vecteur nul le vecteur $\vec{0}_E$.

Exemple 1

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 2

Plus généralement, sur $\mathbb{R}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{R}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

De même, sur $\mathbb{C}^n$, on définit l'addition par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ par

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathbb{C}^n$, muni de ces deux opérations, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de l'addition des polynômes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (P, Q) & \mapsto & P + Q \end{array} \qquad \text{où } (P+Q)(X) = P(X) + Q(X)$$

et de la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (\lambda, P) & \mapsto & \lambda P \end{array} \qquad \text{où } (\lambda P)(X) = \lambda P(X).$$

Alors $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Son vecteur nul est le polynôme nul.

De même, l'ensemble $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients complexes est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Propriétés (Règles de calcul)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E)$;
- $\lambda \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} - \lambda \cdot \vec{v}$;
- $(\lambda - \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} - \mu \cdot \vec{u}$;
- $(-\lambda) \cdot (-\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$.

Propriété Importante

$$\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}_E \text{ si et seulement si } \lambda = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}_E$$

Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $F \subseteq E$.
On peut se poser la question de savoir quand est-ce que F, quand il est muni par l'addition de E et la multiplication par des scalaires, est lui-même un espace vectoriel.

Il s'avère qu'il suffit que F soit stable par l'addition et la multiplication par les scalaires.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si

- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$, $\vec{u} + \vec{v} \in F$;
- pour tout $\vec{u} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda\vec{u} \in F$.

Dans ce cas F, muni de l'addition et de la multiplication par des scalaires,

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \to & F \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times F & \to & F \\ (\lambda, \vec{u}) & \mapsto & \lambda\vec{u} \end{array}$$

est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Abréviation

Sous-espace vectoriel= s.e.v

Proposition 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-ensemble de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ces deux propriétés sont satisfaites

- $\vec{0} \in F$;
- pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\quad \lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.

Preuve

Supposons que F soit un s.e.v de E. Alors comme F n'est pas vide, il contient un vecteur $\vec{u}$. Alors $-\vec{u} \in F$ et $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0} \in F$.
Pour la seconde propriété, soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda\vec{u} \in F$ et donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$.
Exercice : montrer l'implication réciproque. $\square$

Exemples immédiats : E et $\{\vec{0}\}$ sont des s.e.v de E.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$, toute droite passant par l'origine est un s.e.v. En effet toute droite passant par l'origine a comme équation $ax + by = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et on vérifie aisement qu'il s'agit bien d'un s.e.v (exercice).

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par l'origine est un s.e.v. Un plan $\mathcal{P}$ passant par l'origine est donné par une équation de la forme

$$ax + by + cz = 0 \ \text{ où } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Vérifions que $\mathcal{P}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathcal{P}$ passe par l'origine, on a $\vec{0} \in \mathcal{P}$. Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit montrer que $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$. On a

$$\lambda\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \text{ et } ax + by + cz = 0, \ ax' + by' + cz' = 0.$$

D'où $a(\lambda x + x') + b(\lambda y + y') + c(\lambda z + z') = 0$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{P}$.

Exercice

Soit $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit l'addition et la multiplication par les scalaires par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \ \ (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

1. Vérifier que $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Soit $C^1(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ des applications de classe C^1

   $$C^1(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ est dérivable et } f' \text{ est continue}\}.$$

   Montrer que $C^1(\mathbb{R})$ est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Notation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est définie par

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}.$$

Par exemple, si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des sous-ensembles de E, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que $x \in F_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E. Alors l'intersection

$$F = \bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \mid x \in F_i, \text{ pour tout } i \in I\}$$

est un s.e.v de E.

Preuve

- (Pour tout $i \in I$, $\vec{0} \in F_i$) $\implies \vec{0} \in \bigcap_{i\in I} F_i$;
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $i \in I$, $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F_i$. Donc $\lambda\vec{u} + \vec{v} \in F$. □

Corollaire 1

- Si F et G sont des s.e.v, alors leur intersection $F \cap G$ est un s.e.v.
- Si $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des s.e.v, alors leur intersection $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$ est un s.e.v.

Exemple

Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de $\mathbb{R}^3$ passants par l'origine. Alors leur intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, qui est une droite, est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

(U est la droite vectorielle dirigée par $\vec{u}$, V est la droite vectorielle dirigée par $\vec{v}$.)
Alors U et V sont des s.e.v de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$ (exercice).

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de E. Alors on peut fabriquer de nouveaux vecteurs en combinant les deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Un tel nouveau vecteur est appelé une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Plus généralement ...

Définition 4

Soient $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Tout vecteur de E de la forme

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est appelé une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^2$ le vecteur

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 16 \end{pmatrix}$$

est bien une combinaison linéaire des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

car $\vec{w} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}^3$, soient

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un vecteur quelconque $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ est une combinaison linéaire de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Proposition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$. Il existe un plus petit s.e.v de E contenant A. Il est unique et on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par A. On le note $Vect(A)$.

Preuve

E est un s.e.v de E contenant A. Donc il existe des s.e.v de E qui contiennent A. L'intersection F de ces s.e.v est un s.e.v de E contenant A. Il est le plus petit s.e.v qui contient A. En effet, si $A \subseteq H$, où H est un s.e.v de E, alors $F \subseteq H$. $\square$

Proposition 3

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Alors $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, autrement dit

$$Vect(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A \right\}.$$

Remarque

Donc un vecteur $\vec{u} \in E$ est dans $Vect(A)$, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in A$ et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$.

Exemple

Considérons dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ non nuls et non colinéaires. Soient

$$U = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, \quad V = \{\lambda \vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Alors $U = Vect(\{\vec{u}\})$ et $V = Vect(\{\vec{v}\})$.

Exercice

Montrer que $U + V = Vect(U \cup V)$.

Définition 5

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- On dit que S est une partie génératrice de F si

$$F = Vect(S).$$

- On dit que S est libre, ou que les vecteurs de S sont linéairement indépendants, si

$$\text{pour tous } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \text{ pour tous } \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n \in S,$$

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_2 \vec{u}_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

- On dit que S est une base de E, si elle est génératrice et libre.

Exemples

Soit F un s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E et $S \subseteq E$.

- Dans $\mathbb{R}^2$, l'espace vectoriel F engendré par les deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  vérifie $Vect(\vec{u}, \vec{v}) = Vect(\vec{u}, 2\vec{u}) = Vect(\vec{u})$ et donc la famille $\{\vec{u}\}$ est génératrice de F.

- Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est libre où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- $\mathbb{R}^3 = Vect(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Théorème 1

Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul admet une base. Toutes les bases ont la même cardinalité : si B_1 et B_2 sont deux bases, alors il existe une bijection entre B_1 et B_2.

Définition 6

On dit d'un $\mathbb{K}$-e.v E qu'il est de dimension finie s'il admet une base finie. Le cardinal (le nombre d'éléments) d'une base est appelé la dimension de E et est noté $\dim(E)$.

Exemple 1

Dans $\mathbb{R}^n$, considérons la famille $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ où pour $1 \leq i \leq n$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemple 2

Dans $\mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}$-e.v des polynômes de degré inférieur ou égal à n, la famille des polynômes

$$P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2, \ldots, P_n(X) = X^n$$

forme une base. Donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient L une partie libre et G une partie génératrice de E. Alors on peut compléter L par des éléments de G pour former une base de E.

Autrement dit, il existe $F \subseteq G \setminus L$ tel que $L \cup F$ soit une base de E.

Théorème de la base incomplète(version en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ une famille libre de E et soit $\mathcal{G} = \{\vec{g}_1, \cdots, \vec{g}_m\}$ une famille génératrice de E. Alors il existe $\vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}$ de $\mathcal{G}$ telle que la famille $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{g}_{i_1}, \cdots, \vec{g}_{i_p}\}$ forme une base de E.

Proposition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Alors :

- Toute famille libre de E a au plus n éléments.
- Toute famille génératrice de E a au moins n éléments.
- Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Proposition 5

Soit B une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v E de dimension finie n. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- B est une base de E ;
- B est une famille libre à n éléments ;
- B est une famille génératrice à n éléments.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

Exemple récapitulatif

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathcal{U}$ des deux vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathcal{U}$ est une famille libre. En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Alors

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\alpha + \beta = 0 \end{array} \right.$$

Donc $\alpha = \beta$ et $5\alpha = 0$. Par conséquent $\alpha = \beta = 0$.

Exemple récapitulatif sur la base incomplète

suite de l'exemple

On peut compléter la famille libre $\mathcal{U}$ par des éléments de *la base canonique* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ pour former une base de E.
On peut choisir par exemple $\vec{e}_1$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_1 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$. Donc $\gamma = -5\alpha$ et $\alpha = \beta$. Par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ n'est pas libre.
Choisisons $\vec{e}_2$. Vérifions si $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{e}_2 = \vec{0}$. On obtient $2\alpha + 3\beta = 0$, $\alpha - \beta + \gamma = 0$ et $\alpha = \beta$.
Donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$, par conséquent la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est libre.
Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ et comme $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_2\}$ est une famille libre constituée de trois vecteurs, elle forme une base.

Définition 7

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, alors pour tout $\vec{u} \in E$, il existe des uniques scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$$

qui sont appelés les composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6 (Formule de Grassmann)

Soient F et G deux s.e.v d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie. On a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Applications linéaires

Définition 8

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f : E \to F$ une application. On dit que f est linéaire si

- $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$;
- Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v})$.

Applications linéaires : Exemples

Exemple 1

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f : E \to E$ l'homothétie de rapport α

$$\vec{u} \mapsto f(\vec{u}) = \alpha\vec{u}.$$

Alors f est linéaire. En effet :

- $f(\vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
- Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha(\lambda\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \lambda\alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \\ &= \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}). \end{aligned}$$

Exemple 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

Alors f est linéaire. En effet, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda\vec{u}+\vec{v}) = f(\lambda x+x', \lambda y+y') = \Big((\lambda x+x')-(\lambda y+y'), (\lambda x+x')+(\lambda y+y')\Big)$$

$$(\lambda x - \lambda y, \lambda x + \lambda y) + (x' - y', x' + y') = \lambda f(\vec{u}) + f(\vec{v}).$$

Exemple 3

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞. L'application

$$D : E \to E,\ D(f) = f'$$

est une application linéaire. En effet :

- $D(\vec{0}) = \vec{0}$.
- Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'$$

$$= \lambda f' + g'$$

$$= \lambda D(f) + D(g).$$

Applications linéaires : Exemples

Exemple 4

Une rotation R d'un angle θ autour de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ est une application linéaire. En effet, on a

$$\text{pour } \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ R(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

et donc

$$R(\vec{u}+\vec{v}) = R(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (x+x')\cos\theta & -(y+y')\sin\theta \\ (x+x')\sin\theta & +(y+y')\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & +y\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'\cos\theta & -y'\sin\theta \\ x'\sin\theta & +y'\cos\theta \end{pmatrix} = R(\vec{u}) + R(\vec{v}).$$

De même on a $R(\lambda\vec{u}) = \lambda R(\vec{u})$.

Proposition 7

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. Alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F, noté $\mathcal{L}(E,F)$, munit des opérations

$$(f,g) \mapsto (f+g)(x) = f(x) + g(x); \;\; (\lambda, f) \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

est un $\mathbb{K}$-e.v. $\square$

Définition 9

- Une application linéaire de E dans E est appelé un endomporphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijective est appelé un automorphisme.

Rappel

Soit $f : E \to F$ une application.

- L'image directe par f d'une partie $A \subseteq E$ est :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

- L'image réciproque d'une partie $B \subseteq F$ est :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Proposition 8

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- Si H est un s.e.v de E, alors $f(H)$ est un s.e.v de F.
- Si G est un s.e.v de F, alors $f^{-1}(G)$ est un s.e.v de E.

Définition 10

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On appelle :

- Image de f, le s.e.v de E :

$$Im(f) = f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$$

- Noyau de f, le s.e.v de E :

$$Ker(f) = f^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x-y, x+y).$$

Alors f est linéaire (Exercice). On a $Ker(f) = \{\vec{0}\}$ et $Im(f) = \mathbb{R}^2$. En effet :

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \Leftrightarrow x - y = 0$ et $x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
- $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in Im(f) \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x - y = a$ et $x + y = b \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{b-a}{2}$.

Propriété

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ une base de E. Alors $Im(f) = Vect(f(\vec{u}_1), \cdots, f(\vec{u}_n))$.

Proposition 10

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est injective ;
- $Ker(f) = \{\vec{0}\}$;
- Pour tout $\vec{u} \in E$, $f(\vec{u}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est surjective ;
- Im(f)=F.

Définition 11

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La dimension de Im(f) est appelée le rang de f et est notée $rg(f)$.

Théorème (Théorème du rang)

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a

$$\dim(E) = rg(f) + dim(Kerf(f)).$$

Applications linéaires : Rappel terminologie

Terminologie à retenir

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme. Le $\mathbb{K}$-e.v $\mathcal{L}(E, E)$ est noté $\mathcal{L}(E)$.
- Une application linéaire bijective est appelée un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.

Matrices

Définition

On appelle matrice tout tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des scalaires (des éléments de $\mathbb{K}$).

- On note
$$M = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m},$$
a_{ij} est le coefficient : intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne.
- M est dite de taille $n \times m$ (elle a n lignes et m colonnes).

Les matrices

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 25 & 1+i \\ 21 & 11 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$ (mais dans $\mathbb{C}$ aussi) ; B est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Définition

On dit que M est une matrice

- colonne si elle a une seule colonne ($m = 1$).
- ligne si elle a une seule ligne ($n = 1$).
- carrée si elle a le même nombre de lignes que de colonnes ($n = m$).

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} i & 3 & 5 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

A est une matrice carrée
B est une matrice ligne
C est une matrice colonne

Remarques & notations

- Une matrice à n lignes et m colonnes est aussi appelée matrice de type (n, m) ou encore matrice $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times m$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$.

Remarques & notations

- La matrice identité $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice carrée dont tous les coefficients diagonaux valent 1 et les autres coefficients valent 0.
  Exemple :
$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- La matrice nulle $O_{n,m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.
  Exemple :
$$O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 6 (Somme de deux matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} ;\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

On définit la somme $A + B$, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Remarque

On ne somme que des matrices de même taille.

Opérations sur les matrices

Définition (Multiplication par un scalaire)

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

On définit la matrice λA, une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} ; \; \pi B = \begin{pmatrix} 5\pi & 6\pi \\ 7\pi & 8\pi \end{pmatrix}$$

Opérations sur les matrices

Proposition 4

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ muni de l'addition des matrices $(A, B) \mapsto A + B$ et de la multiplication par des scalaires $(\lambda, A) \mapsto \lambda A$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \times m$.

Le vecteur nul de cet espace est la matrice nulle $O_{n,m}$.

Exemple & exercice

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ on considère la famille $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition (Produit de deux matrices)

Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq m}$ une matrice $p \times m$.
Le produit de A et B est la matrice $n \times m$, notée $A \cdot B$, dont les coefficients c_{ij} sont définis par : c_{ij} est le produit scalaire de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (1 \times 4 + 2 \times 5 + 3 \times 6) = (32).$$

Exemple

$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1\times 0+2\times 1 & 1\times 2+2\times 2 \\ 3\times 0+4\times 1 & 3\times 2+4\times 2 \\ 5\times 0+6\times 1 & 5\times 2+6\times 2 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 14 \\ 6 & 22 \end{pmatrix} \end{array}$$

Opérations sur les matrices

Remarques

(1) Pour que le produit de A par B ait un sens if faut que le nombre de colonnes de A soit le même que le nombre de lignes de B.
(2) Le produit d'une matrice de type (n, p) par une matrice de type (p, m) est une matrice de type (n, m).

Remarques

(1) On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve qu'en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ et $A \cdot B = O$ n'implique pas forcément $A = O$ ou $B = O$ (O désigne la matrice nulle).

(2) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a (exercice)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A.$$

Opérations sur les matrices

Propriétés

Les propriétés suivantes sont vraies sous hypothèse que les produits considérés ont un sens :

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;
- $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B)$.

Notations & conventions

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A^0 = I_n, \;\; A^1 = A, \;\; A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque

On a

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

et si $AB \neq BA$ alors

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Proposition 5 (Formule du binôme pour les matrices)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB = BA$.
Alors pour tout $n \geq 0$ on a

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial : $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Matrice de passage

Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $\vec{u} \in E$ ayant comme composantes dans la base $\mathcal{B}$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. (Donc $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{e}_n$).
On appelle matrice des composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

On écrit

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Définition (suite)

Plus généralement, soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une famille de vecteurs de E.
On appelle matrice des composantes de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ dans la base $\mathcal{B}$, la matrice $n \times m$ dont les colonnes sont $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1), \dots, M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_m)$.
Elle est notée $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$.

Matrice de passage

Exemple

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Matrice de passage

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n. Soient $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ deux bases de E.

On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, la matrice carrée $n \times n$, $M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$.
Elle est notée $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$.

Donc c'est la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée des composantes de $\vec{f}_j$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
C'est donc la matrice carrée $n \times n$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\vec{f}_j = a_{1j}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nj}\vec{e}_n.$$

Matrice de passage

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons la matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$. Les composantes de $\vec{w}$ et $\vec{r}$ dans $\mathcal{B}_1$ sont (exercice)

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\,; \ \vec{r} = -\vec{u} + \vec{v}.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}) = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot M_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}).$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent : $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}),\ \mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On avait trouvé

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\vec{f} = \vec{w} + \vec{r}$ et calculons ses composantes dans la base $\mathcal{B}_1$. On a

$$M_{\mathcal{B}_2}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Définition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v munis respectivement des bases $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ et $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire.

On appelle matrice de f, par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, la matrice

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_n)).$$

Elle est notée $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ et $\mathbb{R}^2$ de la base canonique, notée ici $\mathcal{C} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, x - y).$$

On a

$$f(\vec{u}_1) = (1, 1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,\ f(\vec{u}_2) = (2, -1) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2,$$

$$f(\vec{u}_3) = (-1, 0) = -\vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2.$$

Donc

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Proposition

Soient E et F des $\mathbb{K}$-e.v (de dimension finie) munis respectivement des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. Alors pour tout $\vec{u} \in E$

$$M_{\mathcal{C}}(f(\vec{u})) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}(\vec{u}).$$

Remarque

Autrement dit, si Y désigne la matrice colonne des composantes de $f(\vec{u})$ dans la base $\mathcal{C}$ et X désigne la matrice colonne des composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$, alors

$$Y = AX, \quad \text{où } A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, par rapport aux bases canoniques,

$$f(x,y,z) = (x+2y-z, x-y),\ M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension respectives n et m. Soient $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ une base de F.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. L'application linéaire associée à A, relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, est l'application définie par : au vecteur $\vec{u} \in E$ de composantes $(x_1, \cdots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, elle associé le vecteur $\vec{v}$ dont les composantes $(y_1, \cdots, y_m)$ dans la base $\mathcal{C}$ sont données par

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

Autrement dit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire associée à A, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$$

Matrice d'une application linéaire

Théorème

Soit E (respectivement F) un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n (respectivement m), muni d'une base $\mathcal{B}$ (respectivement $\mathcal{C}$). L'application

$$\mathcal{M} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K});\ f \mapsto \mathcal{M}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-e.v.

Remarque

Donc fondamentalement en dimension finie, une fois que les bases sont fixées, il n'existe pas de différence réelle entre applications linéaires et matrices.

Proposition

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, munis respectivement des bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Matrices inversibles

Matrices inversibles

Définition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
Cette matrice est alors unique, est appelée l'inverse de A et est notée A^{-1}.

Exemple

On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

et donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A et B sont inversibles, il en de même de $A \cdot B$ et on a

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Matrices inversibles et bases

Matrices inversibles et bases

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n muni d'une base $\mathcal{B}$.

Une famille de vecteurs $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est inversible.

Exemple

Soit $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Considérons la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ où

$$\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2, \;\; \vec{v} = \vec{e}_2, \;\; \vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre car la matrice

$$M_{Can}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (exercice).

Matrices inversibles et matrices de passage

Matrices inversibles et matrices de passage

Proposition

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$; autrement dit

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}.$$

Exemple

Considérons les deux bases $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{w}, \vec{r})$ de $\mathbb{R}^2$ où

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons déjà calculé :

$$M_{\mathcal{B}_1}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ M_{\mathcal{B}_1}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ est inversible et

$$P^{-1}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matrices inversibles et applications linéaires

Matrices inversibles et applications linéaires

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, $\mathcal{B}_1$ une base de E et $\mathcal{B}_2$ une base de F.

Une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)$ est inversible.

On a alors

$$M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)^{-1} = M_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f^{-1}).$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$.
Sa matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$f(x, y) = (a, b) \text{ si et seulement si } x = \frac{a+b}{2}, \ y = \frac{b-a}{2}$$

et donc $f^{-1}(a, b) = (\frac{a+b}{2}, \ \frac{b-a}{2})$,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

Déterminants

Déterminants

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le déterminant de A est la quantité

$$ad - bc.$$

On note

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 1 \times 5 = 11.$$

Déterminants

Proposition & Définition

Supposons avoir défini le déterminants des matrices carrées $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ avec $m \leq n-1$. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit Δ_{ij} le déterminant de la matrice extraite de A obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. Alors :

- (Développement suivant une colonne) : pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$
- (Développement suivant une ligne) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a
$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Déterminants

Développement suivant la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Développement suivant la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Déterminants

Exemple

En développant suivant la première colonne

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 30 + 0 = -33.$$

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E. On définit

$$det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = det(M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)).$$

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E.

Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E.
- $det(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) \neq 0$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ considérons

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

et donc $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$. On a alors

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Quelques propriétés des déterminants

- Un déterminant qui a deux colonnes (resp. deux lignes) identiques est nul.
- La permutation de deux colonnes (resp. de deux lignes) multiplie le déterminant par -1.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes) est nul.
- Un déterminant dont une colonne (resp. une ligne) est formée de 0 est nul.
- La valeur d'un déterminant est inchangé si l'on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. des autres lignes).
- Si l'on multiplie une colonne (resp. une ligne) d'un déterminant par un scalaire λ, le déterminant est multiplié par λ.

Systèmes d'équations linéaires

Systèmes d'équations linéaires

Les systèmes linéaires interviennent dans diverses branches des mathématiques, ainsi que dans la résolution de nombreux problèmes issus des autres domaines, comme la physique, la mécanique, l'économie, le traitement du signal, ...

Ils peuvent être considérés comme la "base calculatoire" de l'algèbre linéaire. Ils sont au coeur du traitement d'une grande partie des problèmes issus de l'algèbre linéaire en dimension finie. Par exemple, ils permettent de déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire, de déterminer si une famille de vecteurs est libre ou non, ...

Exemples de la géométrie euclidienne

- Dans le plan (Oxy), l'équation d'une droite s'écrit

$$ax + by = c,$$

où a, b et c sont des réels.

- Considérons deux droites : $\mathcal{D}_1$ d'équation $ax + by = c$ et $\mathcal{D}_2$ d'équation $dx + ey = f$. Alors un point (x, y) appartient à l'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$, si et seulement si, il est solution du système linéaire :

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Remarquons que trois cas se présentent :

  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ s'intersectent en un seul point : (S) a une unique solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
  - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Dans l'espace $(Oxyz)$, l'intersection de deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'ensemble des solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

Trois cas se présentent :

- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ s'intersectent en une droite : (S) a une infinité de solutions
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles : (S) n'a pas de solution
- $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondues : (S) a une infinité de solutions.

Systèmes d'équations linéaires

On appelle système linéaire de n équations et à m inconnues $x_1, \ldots, x_m$, tout système de la forme

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{im}x_m & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right.$$

où $(a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

- Les nombres a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sont les coefficients du système (S).
- Le n-uplet $(b_1, \ldots, b_n)$ est le second membre du système (S).

Exemples

(1) Pour $n = 1$, on obtient une équation linéaire

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b.$$

(2) Équation d'une droite dans le plan : $ax + by = c$.
(3) Systèmes à 2 équations et 2 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{c} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{l} 2x + 3y = 4 \\ 9x + 6y = 3 \end{array}\right.$$

(4) Le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{l} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_1 = 1 \end{array}\right.$$

a comme second membre $(1, 1, 1)$.

(1) La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ est appelée la matrice du système (S). Elle sera notée A_S.

(2) Si le second membre du système est nul, autrement dit $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, on dit que le système (S) est homogène.

Exemples

(1) Soit (S) le système

$$(S)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 = 10 \end{cases}$$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$.
(2) Le système

$$(S)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

est homogène.

Écriture matricielle

Systèmes d'équations linéaires

Soit (S) un système linéaire

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1, \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m = b_i, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n, \end{cases}$$

$A = A_S = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ sa matrice et $(b_1, \ldots, b_n)$ son second membre. En posant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

on peut écrire le système (S) sous la forme matricielle

$$A \cdot X = B.$$

Exemple

Soit (S) le système (S) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 = 10. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(6, 10)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x+7y+5z=1, \\ 3x+2y-6z=11, \\ x-y+9z=0. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Considérons le système (S) $\begin{cases} 2x+9y=1, \\ 3x-2y=3, \\ x-y=1. \end{cases}$

Alors la matrice associée à (S) est

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1,3,1)$. L'écriture matricielle de (S) est

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Systèmes d'équations linéaires : Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soient $\mathbb{K}^m$ et $\mathbb{K}^n$ munis respectivement des bases canoniques.

Soit (S) un système linéaire de n équations et m inconnues de matrice A.

Alors on peut associer canoniquement une application linéaire f à (S) définie sur $\mathbb{K}^m$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$: c'est l'application linéaire associée à A (relativement aux bases canoniques)

$$f(x_1, \dots, x_m) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

En posant $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, (S) est équivalent à

$$f(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Définition

Soit (S) un système linéaire de n équations et à m inconnues.

- Une solution de (S) est un m-uplet $(s_1, \ldots, s_m)$ tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, $\cdots$, s_n pour x_n, dans (S) on obtient une égalité.
- L'ensemble des solutions de (S) est l'ensemble de toutes les solutions de (S).
- On dit que (S) est compatible si (S) admet des solutions.

Proposition

Soit (S) un système linéaire homogène de n équations à m inconnues. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$.

Preuve

En utilisant l'application linéaire f associée à (S), on a

$$(s_1, \ldots, s_m) \text{ est une solution de } (S) \text{ si et seulement si } f(s_1, \ldots, s_m) = \vec{0}$$

$$\text{si et seulement si } (s_1, \ldots, s_m) \in Ker(f).$$

Donc l'ensemble des solutions de (S) est le noyau de f. Comme ce dernier est un $\mathbb{K}$-e.v., il en est de même de l'ensemble des solutions de (S). $\square$

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Proposition

Soit (S) un système linéaire de n équations à m inconnues. Si $\vec{s}$ est une solution particulière de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est

$$\vec{s} + Ker(f) = \{\vec{s} + \vec{h} \mid \vec{h} \in Ker(f)\},$$

où f est l'application linéaire associée à (S).

Preuve

Soit $\vec{x}$ une solution de (S). Alors $f(\vec{x}) = \vec{b}$, où $\vec{b}$ est le vecteur représenté par le second membre de (S). On a $f(\vec{x} - \vec{s}) = f(\vec{x}) - f(\vec{s}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$ et donc $\vec{x} - \vec{s} \in Ker(f)$. D'où $\vec{x} = \vec{s} + (\vec{x} - \vec{s}) \in \vec{s} + Ker(f)$. Inversement, si $\vec{x} = \vec{s} + \vec{h}$, avec $\vec{h} \in Ker(f)$, alors $f(\vec{x}) = f(\vec{s} + \vec{h}) = \vec{b} + f(\vec{h}) = \vec{b}$ et donc $\vec{x}$ est solution de (S). $\square$

Systèmes d'équations linéaires : Ensemble des solutions

Proposition

Tout système d'équations linéaires possède ou bien aucune solution, ou bien une seule solution, ou bien une infinité de solutions.

Preuve

Soit $f(\vec{x}) = \vec{b}$ l'interprétation à l'aide d'une application linéaire de (S). Un des cas suivants se présentent :

- $\vec{b} \notin Im(f)$: (S) n'a pas de solutions
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) = \{\vec{0}\}$: (S) a une unique solution
- $\vec{b} \in Im(f)$ et $Kerf(f) \neq \{\vec{0}\}$: (S) a une infinité de solutions

$\square$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle rang de la matrice A la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{K}^m$) engendré par ses vecteurs colonnes.

Propriété

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est égal au rang de l'application linéaire qui lui est associée. En effet, si f est l'application linéaire associée à A

$$rg(f) = \dim(Im(f)) = \dim(Vect(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_m)))$$

or on vérifie que

$$f(\vec{e}_i) = A \cdot \vec{e}_i = \text{ la } i^{\text{ème}} \text{ colonne de } A.$$

Définition

- Soit A une matrice de type (m, n). On appelle matrice extraite de A, toute matrice obtenue en supprimant un certain nombre de lignes et un certain nombre de colonnes de A.
- On appelle déterminant extrait de A, tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A.

Théorème (Calcul pratique du rang d'une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le plus grand entier r tel que l'on puisse extraire de A au moins une matrice carrée inversible de type (r, r). $\square$

Exemples

(1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$.

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Donc on ne peut pas extraire une matrice d'ordre 3 inversible. Par contre la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ extraite de A possède un déterminant non nul ; d'où $rg(A) = 2$.

Définition

Soit (S) un système de n équations à m inconnues de matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$ et de second membre $\vec{b}$.

- Le rang de (S) est par définition le rang de sa matrice :

$$rg(S) = rg(A).$$

- La matrice augmentée de (S) est la matrice, notée $[A|\vec{b}]$, définie par :

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Pour bien distinguer le second membre $\vec{b}$ de A et pour des raisons pratiques de calculs, on écrit $[A|\vec{b}]$ sous la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

Exemple

Considérons le système (S) $\left\{\begin{array}{c} 2x+7y+5z=1, \\ 3x+2y-6z=11, \\ x-y+9z=0. \end{array}\right.$

Alors la matrice du système (S) est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

et le second membre est $(1, 11, 0)$. Donc $[A|\vec{b}]$ est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -6 & 11 \\ 1 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right)$$

Proposition (CNS pour l'existence des solutions)

Soit (S) un système d'équations linéaires, de matrice A et de second membre $\vec{b}$. Alors (S) est compatible, si et seulement si, $rg(A) = rg([A|\vec{b}])$.

Systèmes d'équations linéaires : Existence des solutions

Exemple

Soit (S) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2y+3z=0 \\ 3y+2z=1 \end{array}\right.$ Alors la matrice du système est

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est

$det(A) = 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Donc on peut extraire une matrice d'ordre 3 inversible ; d'où $rg(A) = 3$. La matrice augmentée de (S) est

$[A|\vec{b}] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Son rang ne peut être 4 et comme A est une matrice extraite de rang 3 ; $\mathrm{rg}([A|\vec{b}]) = 3$. Donc (S) est compatible (admet des solutions).

Méthode du pivot de Gauss

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

La méthode de pivot de Gauss consiste à transformer un système, en utilisant des "opérations élémentaires", à un système échelonné réduit. Il se trouve que les systèmes échelonnés réduits sont plus faciles à résoudre.

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

Définition 9

Les opérations suivantes sur les équations d'un système linéaire (ou sur les lignes de sa matrice) sont appelées des opérations élémentaires :

- $L_i \leftarrow \lambda L_i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$: multiplier l'équation L_i par le scalaire non nul λ.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \neq j$: rajouter à l'équation L_i, l'équation L_j multipliée par le scalaire λ.
- $L_i \leftrightarrow L_j$: permuter les deux équations L_i et L_j.

Propriété

Les opérations élémentaires ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système. Ils transforment un système linéaire à un autre systèmes ayant le même ensemble de solutions.

Étape 1 : échelonnement

- Il faut d'abord que le premier coefficient de la première ligne soit non nul. Si ce n'est pas le cas, on permute la ligne L_1 par la première ligne dont le premier coefficient est non nul : $L_1 \leftrightarrow L_j$.
- Si le premier coefficient de la première ligne est différent de 1, on multiplie L_1 par $1/a_{11}$: $L_1 \leftarrow 1/a_{11}L_1$. Nous avons un pivot en position $(1, 1)$.
- Le pivot sert à éliminer tous les autres termes sur la même colonne : pour $2 \leq i \leq n$, on remplace l'équation L_i par $L_i - a_{i1}L_1$, on élimine ainsi x_1 dans l'équation L_i.

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

On obtient un système avec une équation L_1 contenant x_1 et les autres équations ne contenant pas de x_1 :

$$(S') \quad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & \cdots & + & a'_{1m}x_m & = & b'_1 \\ 0 & + & a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & + & a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

On aboutit ainsi à un nouveau système, on recommence les étapes ci-dessus pour éliminer x_2 :

$$(H) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{22}x_2 & + & \cdots & + & a'_{im}x_m & = & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a'_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{nm}x_m & = & b'_n \end{array} \right.$$

Exemple

Soit

$$(S)\quad \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x+y+3z=4 \\ x-y+2z=1 \end{cases}$$

On effectue les opérations élémentaires directement sur la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} {\color{red}1} & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ {\color{red}0} & 1/2 & 5/2 & 7/2 \\ {\color{red}0} & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & {\color{red}1} & 5 & 7 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{2} L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & {\color{red}0} & 9 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{9} L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & {\color{red}1} & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Étape 2 : réduction
En partant de la dernière ligne et en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot, on applique la même méthode que celle de l'étape d'échelonnement, en allant du bas à droite vers le haut à gauche.

Exemple
Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Étape 3 : resolution

Maintenant le système est échelonné et réduit, sa résolution est plus simple.

Exemple

Continuons l'exemple précédent avec la matrice échelonnée réduite obtenue.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5/9 \\ 0 & 1 & 0 & 8/9 \\ 0 & 0 & 1 & 11/9 \end{array}\right)$$

Le système devient

$$\begin{cases} x = -5/9 \\ y = 8/9 \\ z = 11/9 \end{cases}$$

et la solution, dans ce cas, est évidente.

Exemple 2

Considérons le système

$$(S)\quad \begin{cases} -y+2z+13t=5 \\ x-2y+3z+17t=4 \\ -x+3y-3z-20t=-1 \end{cases}$$

La matrice augmentée du système est

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ -1 & 3 & -3 & -20 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right)$$

Exemple 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée.

Exemple 2

Pour réaliser la réduction, on remonte à partir de la dernière ligne en utilisant le premier coefficient non nul comme pivot.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -13 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite.

Systèmes d'équations linéaires : Méthode du pivot de Gauss

Exemple 2
Le système (S) est maintenant équivalent à

$$\left\{\begin{array}{c} x - 4t = -2 \\ y - 3t = 3 \\ z + 5t = 4 \end{array}\right.$$

où x, y, z sont les variables principales et t est la variable secondaire (ou paramètre). L'ensemble des solutions est

$$\Big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -2 + 4\lambda, y = 3 + 3\lambda, z = 4 - 5\lambda, t = \lambda; \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

$$= (-2, 3, 4, 0) + Vect\Big((4, 3, -5, 1)\Big).$$

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Si A est une matrice carrée inversible de type (n, n) et B est l'inverse de A, alors

$$AB = I_n$$

Si $B_1, \dots, B_n$ sont les colonnes de B , l'équation matricielle précédente est équivalente aux n équations

$$AB_i = \vec{e}_i, i = 1, ..., n.$$

Donc calculer B revient à résoudre n systèmes d'équations linéaires ayant la même matrice A.
Pour calculer la matrice inverse, on applique la méthode de Gauss pour résoudre les systèmes précédents parallèlement.

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On écrit alors le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on applique la méthode de Gauss.

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right)$$

Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1 & 1/3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Application de la méthode de Gauss à l'inversion des matrices

Exemple

Donc la matrice inverse est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 1/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Systèmes de Cramer

Systèmes de Cramer

Définition

On dit qu'un système de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si la matrice A de ce système est inversible.

Systèmes de Cramer

Proposition

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Quel que soit B, le système (S) admet une solution et une seule.
- Quel que soit B, le système (S) admet au moins une solution.
- Quel que soit B, le système (S) admet au plus une solution.
- Le système homogène associé au système (S) n'admet que la solution triviale.
- La matrice A du système (S) est inversible.
- $det(A) \neq 0$.

La solution unique du système (S) est alors $X = A^{-1}B$.

Proposition (Règle de Cramer)

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues écrit sous forme matricielle $AX = B$.

Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit A_i la matrice obtenue en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par le second membre B.

Supposons que (S) est de Cramer (donc $det(A) \neq 0$). Alors l'unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$ de (S) est donnée par

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}, \ \ 1 \leq i \leq n.$$

Exemple

Soit (S) $\left\{ \begin{array}{c} x+y=5 \\ 2x+3y=6 \end{array} \right.$ écrit sous forme matricielle

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array}\right).$$

On a $\det(A)=\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right|=1\neq 0.$
Donc (S) est un système de Cramer et l'unique solution est

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right|}=\frac{9}{1}=9,\ y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{array}\right|}=\frac{-4}{1}=-4.$$

Réduction des endomorphismes

Rappel

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme.
- L'espace vectoriel des endomorphismes est noté $End(E)$.

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et $f \in End(E)$. On se fixe une base $\mathcal{B}$ de E.
On considère la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}$: *on prend la même base pour E comme ensemble de départ que pour E comme ensemble d'arrivée*.
Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ et les composantes de chaque $f(\vec{e}_j)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont

$$f(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ \ f(x, y) = (x + 2y, -x + 4y).$$

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $Can = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors

$$f(\vec{e}_1) = f(1, 0) = (1, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{Can},$$

$$f(\vec{e}_2) = (0, 1) = (2, 4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}_{Can}.$$

Donc

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si on considère maintenant $\mathbb{R}^2$ muni de la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2, 1), \quad \vec{v} = (1, 1)$$

alors

$$f(\vec{u}) = f(2, 1) = (4, 2) = 2\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$f(\vec{v}) = f(1, 1) = (3, 3) = 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On voit que les deux matrices de f, par rapport aux différentes bases Can et $\mathcal{B}$

$$M_{Can}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont très différentes.
La dernière matrice est plus simple.

La matrice associée à un endomorphisme f dépend de la base choisie : pour deux bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, les matrices $M_{\mathcal{B}_1}(f)$, $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ ne sont pas forcément identiques.

L'objectif de la réduction d'un endomorphisme, c'est de trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $M_{\mathcal{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

Les matrices les plus simples sont les matrices diagonales :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Elles sont simples : la somme, la multiplication, la puissance n-ème, ... etc, se ramène à des opérations simples.

Exemple

Si

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_p \end{pmatrix}$$

alors

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2\beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p\beta_p \end{pmatrix}$$

Si

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit d'un endomorphisme f qu'il est diagonalisable, s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \;\; f(x,y) = (x+2y, -x+4y).$$

Alors, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ où

$$\vec{u} = (2,1), \;\; \vec{v} = (1,1)$$

la matrice de f est

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et donc f est diagonalisable.

Comment peut-on définir la diagonalisation d'une matrice ?

Rappel

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors l'application linéaire associée à A est définie par

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad f_A(x_1, \cdots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarquons que A est la matrice de f_A par rapport à la base canonique : $M_{Can}(f_A) = A$.

On définit maintenant la diagonalisation d'une matrice en utilisant son application linéaire associée ...

Définition

On dit d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qu'elle est diagonalisable, si l'application linéaire qui lui est associée est diagonalisable.

Rappelons que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$A = M_{Can}(f) = P_{Can,\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}(f) \cdot P_{\mathcal{B},Can}$$

et $P_{\mathcal{B},Can} = P_{Can,\mathcal{B}}^{-1}$.

Donc en particulier, si A est diagonalisable, alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

Inversement, supposons que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et P est inversible.
Si on prend pour $\mathcal{B}$ la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ où $\vec{u}_i$ est le i-ième vecteur colonne de la matrice P ; comme P est inversible, $det(P) \neq 0$, $\mathcal{B}$ est une famille libre et est donc une base de $\mathbb{K}^n$.
Donc en particulier, P est la matrice de passage de Can à $\mathcal{B}$ et D est la matrice de f_A dans la base $\mathcal{B}$.

Donc A est diagonalisable.

Définition

On dit que la matrice A est semblable à B s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Donc on avait montré la proposition importante suivante :

Proposition

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarques (en pratique)

- Si A est diagonalisable et si $\mathcal{B}$ est la base dans laquelle A (ou l'application linéaire qui lui est associée) est représentée par une matrice diagonale D alors

$$A = PDP^{-1}$$

  où $P = P_{Can,\mathcal{B}}$ est la matrice de passage de la base canonique Can à $\mathcal{B}$.
- Diagonaliser une matrice carrée A revient à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$. On cherche une base $\mathcal{B}$, dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale D et on prend P la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

Comment peut-on, en pratique, trouver une telle matrice diagonale D ?

Pour cela, quelques notions sont nécessaires ...

Vecteurs propres, valeurs propres

Définition (Vecteurs propres, valeurs propres)

Soit $f \in End(E)$.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de f si :
  - $\vec{u} \neq \vec{0}$,
  - il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe $\vec{u} \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$.
- Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f, l'unique scalaire λ vérifiant $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ est appelé la valeur propre associée à $\vec{u}$.

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

Remarque

Si $\vec{u}$ est un vecteur propre de f, alors pour tout scalaire α non nul, $\alpha\vec{u}$ est un vecteur propre de f.
En effet,
$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) = \alpha\lambda\vec{u} = \lambda(\alpha\vec{u}).$$

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

On définit les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices, en utilisant les applications linéaires associées.

- Un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur propre de A s'il est pour l'application linéaire associée.
- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si elle l'est pour l'application linéaire associée.

Réduction des endomorphismes : Vecteurs propres, valeurs propres

Cela revient à dire :

- Un vecteur $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ est un vecteur propre de A si $\vec{u} \neq 0$ et s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- De même, un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe $\vec{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proposition

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, il existe une base de E formée de vecteurs propres de f.

Preuve

Si f est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de E telle que

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. D'où $\vec{u}_i$ est un vecteur propre.

Réciproquement, si E admet une base $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ formée de vecteurs propres de f, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe λ_i tel que $f(\vec{u}_i) = \lambda_i \vec{u}_i$. Donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et f est diagonalisable. □

La traduction de la proposition 1 pour les matrices :

Proposition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi elle possède n vecteurs propres formant une base de $\mathbb{K}^n$.

Sous-espaces propres

Rappel

Soient U et V deux s.e.v du $\mathbb{K}$-e.v E.

- On appelle somme de U et V l'ensemble défini par

$$U + V = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\}.$$

- On dit que la somme $U + V$ est directe si $U \cap V = \{\vec{0}\}$.
- On dit du s.e.v F qu'il est la somme directe de U et V si
  - $F = U + V$;
  - $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

  On écrit $F = U \oplus V$.

Plus généralement, soient $U_1, \dots, U_m$, des s.e.v de E. On dit que E est la somme directe de $U_1, \dots, U_m$ et on écrit $E = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ si :

- $E = U_1 + U_2 \cdots + U_m = \{\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m \mid \vec{u}_i \in U_i\}$,
- pour tout $\vec{u}_1 \in U_1, \vec{u}_2 \in U_2, \dots, \vec{u}_m \in U_m$:

  si $\vec{u}_1 + \cdots + \vec{u}_m = \vec{0}$ alors $\vec{u}_i = \vec{0}$ pour tout $1 \leq i \leq m$.

Propriété

Soient $U_1, \dots, U_m$, des s.e.v de E. Pour chaque $1 \leq i \leq m$, soit $\mathcal{B}_i$ une base de U_i. Alors E est la somme directe de $U_1, \dots, U_m$, si et seulement si, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ est une base de E.

Définition

Soit f un endomorphisme de E et soit λ une valeur propre de f. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ de f, le sous-espace vectoriel

$$E_\lambda(f) = Ker(f - \lambda Id_E) = \{\vec{u} \in E \mid f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}\}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ une valeur propre de A, on définit d'une façon similaire le sous-espace propre associé à la valeur propre λ de A

$$E_\lambda(A) = \{\vec{u} \in E \mid A\vec{u} = \lambda\vec{u}\}.$$

Proposition

L'endomorphisme f est diagonalisable, si et seulement si, E est somme directe de ses sous-espaces propres.

Autrement dit, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_m}(f).$$

Corollaire

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, f est diagonalisable si et seulement si

$$\dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}(f)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_m}(f)).$$

Corollaire

Si $\dim(E) = n$ et f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Polynôme caractéristique

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit

$$P_A(X) = \det(A - XI_n).$$

Alors $P_A(X)$ est un polynôme de degré n, appelé le polynôme caractéristique de A.

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 4 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X) - 12 = X^2 - 3X - 10.$$

Soit $f \in End(E)$. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E. Alors

$$M_{\mathcal{B}_1}(f) = P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$. On a

$$\det(M_{\mathcal{B}_1}(f) - XI_n) = \det(P^{-1} M_{\mathcal{B}_2}(f) P - XI_n)$$

$$= \det(P^{-1}(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n)P) = \det(M_{\mathcal{B}_2}(f) - XI_n).$$

Cela permet de définir :

Définition

Soit $f \in End(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On définit le polynôme caractéristique de f par :

$$P_f(X) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - XI_n).$$

(Donc il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$).

Proposition 5

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors λ est une valeur propre de A, si et seulement si, λ est racine du polynôme caractéristique de A.

Preuve

- Si λ est une valeur propre de A, alors il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$. Donc $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Si $\det(A - \lambda I_n) = 0$, alors $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc il existe $\vec{u}$ avec $\vec{u} \neq 0$ tel que $(A - \lambda I_n)\vec{u} = \vec{0}$ et donc $\vec{u} \neq 0$ tel que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Donc λ est une valeur propre.

□

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 \\ 5 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X).$$

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2.

Rappel sur les polynômes

- Une racine λ d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, est une racine de multiplicité m si $(X-\lambda)^m$ divise $P(X)$ mais $(X-\lambda)^{m+1}$ ne divise pas $P(X)$.
- Un polynôme $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, de degré n, est dit scindé dans $\mathbb{K}[X]$, s'il peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a(X-\lambda_1)^{m_1} \cdots (X-\lambda_p)^{m_p}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{K}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (et $m_1 + \cdots + m_p = n$).

Exemple

(1) Soit

$$P(X) = X^3 - 5X^2 + 7X - 3.$$

Alors

$$P(X) = (X-1)^2(X-3).$$

La multiplicité de la racine $\lambda_1 = 1$ est 2 et la multiplicité de la racine $\lambda_2 = 3$ est 1. On voit aussi que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ mais aussi dans $\mathbb{C}[X]$.

(2) Le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[X]$ car il n'admet pas de racine réelle. Par contre il est scindé dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X-j)(X-\bar{j})$ où $j = e^{i\pi/3}$.

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A.

- La multiplicité algébrique de λ est la multiplicité de λ comme racine de $P_A(X)$.
- La multiplicité géométrique de λ est la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

Diagonalisation

Théorème (CNS pour la diagonalisation)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$: dans ce cas

$$P_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_p)^{m_p}$$

  où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres ; m_i est la multiplicité algébrique de λ_i.
- Pour chaque valeur propre λ_i, sa multiplicité algébrique coïncide avec sa multiplicité géométrique : $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation–mise en pratique

- On calcule le polynôme caractéristique $P_A(X)$.
- On cherche les racines de $P_A(X)$, $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, et les multiplicités algébriques $m_1, \ldots, m_p$.
  - Si $P_A(X)$ n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
  - Si $P_A(X)$ est scindé, on cherche les bases des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$. Si pour chaque i, $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = m_i$, alors A est diagonalisable :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

  où chaque λ_i est répété m_i-fois.

Réduction des endomorphismes : Diagonalisation–mise en pratique

Dans ce cas, si $\mathcal{B}_i$ est une base de $E_{\lambda_i}(A)$, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de A. On a alors $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$.

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & -3 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 13.$$

Le discriminant est strictement négatif et donc $P_A(X)$ n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$. Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ -1 & 4-X \end{vmatrix} = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$$

et donc les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3$.

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $P_A(X)$ admet deux racines distinctes, A est diagonalisable (on applique ici le corollaire 2). La matrice diagonale est $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. On a

$E_{\lambda_1}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = Vect((2, 1))$

$E_{\lambda_2}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\} = Vect((1, 1))$.

En posant $\vec{u} = (2, 1), \vec{v} = (1, 1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de A. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

(3) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique : on a

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & 0 & -1 \\ 2 & 4-X & 2 \\ -1 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = (4-X) \begin{vmatrix} 3-X & -1 \\ -1 & 3-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)(4-X)^2.$$

Donc A possède deux valeurs propres : 2 de multiplicité algébrique 1 (on dit qu'elle est simple) et 4 de multiplicité algébrique 2 (on dit qu'elle est double). En plus P_A est scindé.

2. Sous-espaces propres : on a

$$E_2(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

$$E_4(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}.$$

En résolvant le système homogène $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, par la méthode de Gauss par exemple, on obtient $E_2(A) = Vect(\vec{u}),$ où $\vec{u} = (1, -2, 1)$.
De même
$E_4(A) = Vect(\vec{v}, \vec{w}),$ où $\vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (1, 0, -1)$.
Donc la multiplicité géométrique de la valeur propre 2 est 1 et celle de la valeur propre 4 est 2.

3. Diagonalisabilité : comme P_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre coïncide avec sa multiplicité géométrique, A est diagonalisable.
4. Diagonalisation : on a

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A = PDP^{-1}.$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v et $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Si $f \in End(E)$, on note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(f) = a_n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 Id_E,$$

où $f^k = \underbrace{f \circ f}_{k-fois} \circ \cdots \circ f$.

De même si $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, alors $P(A)$ est définie par

$$P(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_m.$$

Théorème (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $f \in End(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $P_f(X)$ son polynôme caractéristique (resp. $P_A(X)$). Alors $P_f(f) = 0$ (resp. $P_A(A) = 0$).

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 2 \\ 4 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2 - 8 = X^2 - 2X - 7.$$

D'après le théorème, on a $A^2 - 2A - 7I_2 =$ la matrice nulle .
Cela permet par exemple de calculer A^2 en utilisant A et la matrice identité I_2.
On a aussi $A \cdot (\frac{1}{7}(A - 2I_2)) = I_2$ et on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{7}(A - 2I_2)$.

Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu que dans un espace vectoriel nous pouvons additionner des vecteurs et les multiplier par des scalaires.

Pouvons-nous aller plus et définir des notions comme les longueurs, les angles et l'orthogonalité ?

Le produit scalaire est une nouvelle opération qui s'ajoute aux lois s'appliquants aux vecteurs, à savoir l'addition et la multiplication scalaire, et qui permet donc d'utiliser les notions usuelles de géométrie comme les longueurs, les distances, les angles et l'orthogonalité.

Le produit scalaire permet d'étendre ces notions à des espaces vectoriels réels ou complexes de toute dimension.

Produit scalaire

Rappelons que dans $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire est défini par (en utilisant la notation matricielle)

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = xx' + yy' + zz'$$

On remarque que ce produit scalaire satisfait les propriétés :

- en fixant $\vec{u}$, l'application $\vec{x} \mapsto \langle \vec{u} | \vec{x} \rangle$ est linéaire ; de même l'application $\vec{u} \mapsto \langle \vec{x} | \vec{u} \rangle$ est linéaire ; on dit qu'elle est *bilinéaire* ;
- *symétrie* : pour tous $\vec{u}, \vec{v}$, $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$
- *positivité* : pour tout $\vec{u}$, $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$;
- *définie* : pour tout tout $\vec{u}$, $\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$.

Il s'avère que ces trois propriétés sont les plus élémentaires qui permettent de généraliser les "propriétés géométriques" recherchées aux espaces abstraits ...

Nous distinguerons le cas réel et le cas complexe pour définir le produit scalaire.

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée forme bilinéaire si :

- φ est linéaire à droite : pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est linéaire.
- φ est linéaire à gauche : pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.

Exemple

En prenant $E = \mathbb{R}$ l'application

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(x, y) = xy$$

est une forme bilinéaire sur E. En effet :

- φ est linéaire à droite : pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_a(y) = ay$ est évidemment linéaire.
- φ est linéaire à gauche : pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est évidemment linéaire.

On remarque par contre que φ elle-même n'est pas linéaire (exercice).

Produit scalaire réel

Définition

Une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est

- symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous $x, y \in E$.
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- définie si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

est une forme bilinéaire (exercice) symétrique et définie positive. En effet :

- φ est symétrique : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_2 x_2 = \varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))$$

  et donc φ est symétrique.
- φ est définie positive : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0$$

  et $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$ si et seulement si $(x_1, x_2) = (0, 0)$.

Produit scalaire réel

Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive.

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien. S'il est de dimension finie alors est appelé un espace euclidien.

Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y\rangle$.

Produit scalaire réel

Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Exemple

Soit $E = C([a, b])$ le $\mathbb{R}$-e.v des applications continues de l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors l'application

$$E \times E \to \mathbb{R},\ (f, g) \to \langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

est un produit scalaire. En effet

- bilinéarité : conséquence de la linéarité de l'intégrale ;
- symétrie : $\langle f|g\rangle = \langle g|f\rangle$ est évidente ;
- positivité : $\langle f|f\rangle = \displaystyle\int_a^b f(x)^2\,dx \geq 0$ car l'intégrale d'une fonction positive est positive ;
- définie : $\langle f|f\rangle = 0 \Rightarrow f = 0$; propriété de l'intégrale de Riemann.

Produit scalaire réel

Exemple

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v des matrices carrées $n \times n$. Alors l'application

$$E \times E \to \mathbb{R},\ (A, B) \to \langle A|B\rangle = Tr(A^t \cdot B)$$

est un produit scalaire (où pour une matrice M, $Tr(M)$ désigne la trace de M et M^t désigne la transposée de M).

Exercice

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Pour $(x, y), (x', y') \in E$, on pose

$$\varphi((x, y), (x', y')) = xx' + 12(xy' + yx') + yy'.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Produit scalaire complexe

Définition

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est appelée forme sesquilinéaire sur E si :

- pour tout $b \in E$ fixé, l'application $\varphi_b : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_b(x) = \varphi(x, b)$ est linéaire.
- pour tout $a \in E$ fixé, l'application $\varphi_a : E \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_a(y) = \varphi(a, y)$ est semi-linéaire :

$$\varphi(a, y_1 + y_2) = \varphi(a, y_1) + \varphi(a, y_2), \text{ pour tout } y_1, y_2 \in E$$

$$\varphi(a, \lambda y) = \bar{\lambda}\varphi(a, y), \text{ pour tout y } \in E \text{ et } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Exemple

En prenant $E = \mathbb{C}$ l'application

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \varphi(x, y) = x\overline{y}$$

est une forme sesquilinéaire sur E. En effet :

- pour tout $b \in \mathbb{C}$ fixé, l'application $\varphi_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_b(x) = xb$ est linéaire.
- pour tout $a \in \mathbb{C}$ fixé, l'application $\varphi_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi_a(y) = a\overline{y}$ est semi-linéaire :

$$\varphi_a(y_1 + y_2) = a(\overline{y_1 + y_2}) = a\overline{y_1} + a\overline{y_2} = \varphi_a(y_1) + \varphi_a(y_2)$$
$$\varphi_a(\lambda y) = a\overline{\lambda y} = a\overline{\lambda}\overline{y} = \overline{\lambda}\varphi_a(y).$$

Produit scalaire complexe

Définition

Une forme sesquilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est

- hermitienne si $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$, pour tout $x, y \in E$.
- positive si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
- définie si pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Produit scalaire complexe

Exemple

Dans $\mathbb{C}^2$, l'application

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$$

est une forme sesquilinéaire (exercice) hermitienne et définie positive. En effet :

- φ est hermitienne : on a

  $$\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} = \overline{y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2}} = \overline{\varphi((y_1, y_2), (x_1, x_2))}$$

  et donc φ est hermitienne.
- φ est définie positive : on a
  $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} = |x_1|^2 + |x_2|^2 \geq 0$ et
  $\varphi((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0 \Rightarrow (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Produit scalaire complexe

Définition

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire sur E qui est hermitienne et définie positive.

Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien. S'il est de dimension finie alors il est appelé hermitien.

Notation

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y\rangle$.

Exemple : Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$

Dans $\mathbb{C}^n$, le produit scalaire canonique, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}.$$

Produit scalaire complexe

Récapitulatif pour les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire sur E qui est symétrique et définie positive.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien.
- Produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$: le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, est défini par

$$\langle (x_1, \ldots, x_n) | (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Produit scalaire complexe

Récapitulatif pour les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- On appelle produit scalaire sur E toute forme sesquilinéaire sur E qui est hermitienne et définie positive.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.
- Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé un espace hermitien.
- Produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$: le produit scalaire canonique de $\mathbb{C}^n$, est défini par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}.$$

Propriétés géométriques

Rappel

Si $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ est un produit scalaire, alors $\varphi(x, y)$ est noté $\langle x|y \rangle$.

Propriétés géométriques

Dans la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel préhilbertien. Donc un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire noté $\langle x|y\rangle$.

Propriétés géométriques : Norme associée

Définition

Nous avons pour tout $x \in E$, $\langle x|x\rangle \geq 0$; on pose alors

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

qu'on appelle la norme de x ;

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x,y)|(x',y')\rangle = xx' + yy'$$

on retombe sur la notion usuelle de norme (ou longueur)

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle (x,y)|(x,y)\rangle} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Propriétés géométriques : Norme associée

Proposition

Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- $\|x\| \geq 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire),
- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(\langle x|y\rangle) + \|y\|^2$.

Propriétés géométriques : Distance associée

Définition

Pour tous $x, y \in E$, on pose $d(x,y) = \|x - y\|$ qu'on appelle la distance entre x et y.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x,y) | (x',y') \rangle = xx' + yy'$$

on retombe également sur la notion usuelle de distance

$$d((x,y),(x',y')) = \sqrt{\langle (x-x', y-y') | (x-x', y-y') \rangle}$$

$$= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Proposition

Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

- pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) \geq 0$,
- pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$,
- pour tous $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).

Proposition (Identité du parallélogramme)

Dans tout espace préhilbertien E, on a pour tous $x, y \in E$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Dans tout espace préhilbertien E, on a pour tous $x, y \in E$

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

Soient u et v deux vecteurs non nuls de E. On sait d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\left|\frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}\right| \leq 1$$

On peut donc trouver un unique angle $\alpha \in [0, \pi]$ tel que

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$

Définition

Cet unique angle est appelé l'angle non orienté entre u et v.

Propriétés géométriques : Orthogonalité

Définition

- On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si $\langle x|y \rangle = 0$. On écrit $x \perp y$.
- Deux parties A et B de E sont dites orthogonales si pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, a et b sont orthogonaux. On écrit $A \perp B$.

Remarque

Remarquons que deux vecteurs u et v non nuls sont orthogonaux si et seulement si l'angle non orienté formé entre u et v est $\pi/2$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace préhilbertien E. On dit que $\mathcal{C}$ est orthogonale si $u_i \perp u_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ avec $i \neq j$.

Exemple

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Soit $\mathcal{B} = (u, v)$ la famille définie par

$$u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

est une famille orthogonale. En effet

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

et donc u et v sont orthogonaux.

Théorème de Pythagore

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs d'un espace préhilbertien E. Alors
$$\Big\| \sum_{i=1}^{p} u_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

Propriétés géométriques : Orthogonalité

Proposition

Toute famille de vecteurs, ne contenant pas de vecteurs nuls, orthogonale est libre.

Proposition

Soit A une partie non vide de E. L'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A, noté $A^\perp$

$$A^\perp = \{x \in E | x \perp y \text{ pour tout } y \in A\}$$

est un s.e.v de E appelé l'orthogonal de A.

Proposition

Pour tout s.e.v F de dimension finie de E on a $E = F \oplus F^{\perp}$.

Théorème (projection orthogonale)

Soit F un s.e.v de dimension finie de E. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique vecteur y dans F tel que :

$$d(x, y) = d(x, F) = \inf_{z \in F} d(x, z).$$

C'est l'unique vecteur appartenant à F vérifiant $x - y \in F^{\perp}$.

Pour $x \in E$, le vecteur y de F fourni par le théorème précédent peut être vu comme la meilleure approximation de x dans F.

On dit que y est la projection orthogonale de x sur F. On note $y = p_F(x)$.

On a $E = F \oplus F^{\perp}$ et

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x))$$

avec $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.

Bases orthonormées, orthonormalisation

Définition

On dit d'un vecteur $x \in E$ qu'il est unitaire si $\|x\| = 1$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{C}$ est orthonormée si $\mathcal{C}$ est orthogonale et si u_i est unitaire pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Autrement dit, une famille $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E est une base orthonormée si

- $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- $\langle u_i | u_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Exemple

Reprenons un exemple précédent. On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. Alors la famille $\mathcal{B} = (u, v)$ définie par

$$u = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

est une famille orthonormée. En effet (orthogonalité déjà vue)

$$\langle u|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

et donc u et v sont orthogonaux. On a en plus

$$\sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$$

et de même $\sqrt{\langle v|v\rangle} = 1$.

Définition

Une base de E qui forme une famille orthonormée est appelée base orthonormée.

De même, une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est une base orthonormée si

- $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,
- $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

la base canonique $Can = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée. Il faut vérifier (exercice)

- $\|e_i\| = 1$,
- $\langle e_i | e_j \rangle = 0$ pour tout i, j avec $i \neq j$.

Proposition (Lecture des composantes dans une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien ou hermitien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout $x \in E$, on a

$$x = \langle x|e_1 \rangle\, e_1 + \cdots + \langle x|e_n \rangle\, e_n \quad \text{et } \|x\|^2 = |\langle x|e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle x|e_n \rangle|^2.$$

Donc

$$x = \begin{pmatrix} \langle x|e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x|e_n \rangle \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Preuve

Écrivons $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$; donc en composantes dans la base $\mathcal{B}$. Alors par la bilinéarité du produit scalaire et l'orthonormalité de $\mathcal{B}$

$$\langle x | e_1 \rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n | e_1 \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle e_1 | e_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle e_n | e_1 \rangle$$

$$= \lambda_1 \langle e_1 | e_1 \rangle = \lambda_1.$$

De même $\langle x | e_i \rangle = \lambda_i$ et donc on a bien

$$x = \langle x | e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x | e_n \rangle e_n \text{ et } \|x\|^2 = |\langle x | e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle x | e_n \rangle|^2. \quad \square$$

Proposition (Lecture d'un produit scalaire dans une base orthonormée)

Soit E un espace euclidien ou hermitien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors pour tout $x, y \in E$, si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

alors

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Autrement dit le produit scalaire dans ce cas, peut être vu comme le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition (Projection orthogonale)

Soit F un s.e.v. de dimension finie de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F.

Alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur F est donnée par

$$p_F(x) = \langle x | e_1 \rangle \, e_1 + \cdots + \langle x | e_p \rangle \, e_p.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, calculons la projection orthogonale d'un vecteur u sur la droite vectorielle $F = Vect(v)$ engendrée par le vecteur non nul v.

- Une base orthonormée de F : en posant $e = \dfrac{v}{\|v\|}$,on obtient une base orthonormée de F.
- On a donc

$$p_F(u) = \langle u|e\rangle\, e = \left\langle u|\frac{v}{\|v\|}\right\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u|v\rangle}{\|v\|^2}v = \frac{\langle u|v\rangle}{\langle v|v\rangle}v.$$

Exemple

Calculons la projection orthogonale de $u = (2, 1, 1)$ sur la droite vectorielle $F = Vect((1, 1, 0))$.

- base orthonormée de F : $\|(1, 1, 0)\| = \sqrt{2}$ et donc en posant $e = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ on obtient une base orthonormée de F
- On a

$$p_F(u) = \langle u|e\rangle\, e = (\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0).$$

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit E un espace préhilbertien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de E, orthonormée et vérifiant $Vect(f_1, \dots, f_j) = Vect(e_1, \dots, e_j)$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

On construit les vecteurs $f_1, \dots, f_n$ par récurrence, selon un procédé appelé le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, comme suit :

1. On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$.
2. Supposons que la famille $(f_1, \dots, f_j)$ soit construite, $1 \leq j \leq n-1$, on définit alors

$$f'_{j+1} = e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k \quad \text{et} \quad f_{j+1} = \frac{f'_{j+1}}{\|f'_{j+1}\|}.$$

Remarque

Remarquons que le vecteur

$$\sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k$$

est la projection orthogonale de e_{j+1} sur l'espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_j$. Par conséquent, le vecteur

$$e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k$$

est orthogonal à l'espace vectoriel engendré par $f_1, f_2, \ldots, f_j$. Pour le rendre unitaire il suffit de le diviser par sa norme

$$\frac{e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k}{\left\| e_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \langle e_{j+1} | f_k \rangle \, f_k \right\|}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ considérons $u_1 = (1, -1, 0)$; $u_2 = (0, 2, 1)$ et $F = Vect(u_1, u_2)$ et calculons une base orthonormée de F par le procédé de Gram-Schmidt. On pose

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0)$$

on voit alors $\|v_1\| = 1$ et $Vect(u_1) = Vect(v_1)$. On a

$$u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle \, v_1 = (0, 2, 1) + \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0) = (1, 1, 1)$$

et on pose donc

$$v_2 = \frac{u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle \, v_1}{\|u_2 - \langle u_2 | v_1 \rangle \, v_1\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

D'où (v_1, v_2) est une base orthonormée de F.

Corollaire (Existence des bases orthonormées)

Tout espace euclidien ou hermitien admet des bases orthonormées.

Corollaire (Théorème de la base orthonormée incomplète)

Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$, où $1 \leq p \leq n-1$, une famille orthonormée de E. Alors il existe $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E tels que $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormée de E.

Espace vectoriel muni d'un produit scalaire, diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Diagonalisation des matrices symétriques et hermitiennes

Nous avons vu à la section sur la réduction des endomorphismes qu'étant donnée une matrice A, on cherche une matrice diagonale D semblable à A ; ou d'une façon équivalente, on cherche une base $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Dans les espaces euclidiens ou hermitiens, où nous disposons d'un produit scalaire, on peut se demander, étant donnée une matrice A, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

Nous verrons que les matrices qui vérifient cette propriété dans les espaces euclidiens sont les matrices symétriques et dans les espaces hermitiens sont les matrices hermitiennes.

Matrices symétriques

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq m}$ une matrice de type (n, m) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

La transposée de A, notée ${}^tA$, est la matrice de type (m, n) définie par : pour $1 \leq j \leq n$, la colonne j de ${}^tA$ est égale à ligne j de A.

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

On dit que A est symétrique si elle est égale à sa transposée.

$$A \text{ est symétrique si et seulement si } A = {}^tA.$$

Exemple

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique, alors que la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas car $B \neq {}^tB$

$${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable dans une base orthonormée s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ et une matrice diagonale D telles que

$$A = P_{Can\mathcal{B}} D P_{Can\mathcal{B}}^{-1}.$$

(Rappel : Can est la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et supposons que A est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (f_1, \cdots, f_n)$. Alors, comme Can est orthonormée, la matrice de passage $P = P_{Can\mathcal{B}} = (p_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ a comme coefficients

$$p_{ij} = \langle f_j | e_i \rangle .$$

Symétriquement, comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, la matrice de passage $P' = P_{\mathcal{B}Can} = (p'_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ a comme coefficients

$$p'_{ij} = \langle e_j | f_i \rangle .$$

On remarque que

$$p_{ij} = \langle f_j | e_i \rangle = \langle e_i | f_j \rangle = p'_{ji}$$

et donc $P' = {}^tP$.

D'où
$$ {}^tA = {}^t(PDP') = {}^tP'{}^tD{}^tP = PDP' = A $$
et donc A est symétrique. En fait cette dernière condition est aussi suffisante ...

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est symétrique.

Intermédiaire important ...

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux à deux orthogonaux.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est symétrique, alors il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Nous avons vu que $P^{-1} = {}^tP$. On dit que P est orthogonale.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que P est orthogonale si $P \cdot {}^tP = {}^tP \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

La première représente une rotation d'angle θ et le seconde représente une symétrie orthogonale.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, toute matrice orthogonale est semblable à une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition

Soient E un espace euclidien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors P est orthogonale si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

et cherchons une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$. Comme A est symétrique cela est possible.
Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \frac{-1}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{5}{2}$. Les sous-espaces propres sont

$$E_{-1/2}(A) = Vect((1,-1)),\ E_{5/2} = Vect((1,1))$$

et par conséquent, en posant $\vec{u} = (1,-1)$ et $\vec{v} = (1,1)$, $\mathcal{B} = (\vec{u},\vec{v})$ est une base de vecteurs propres de A. Pour avoir une base orthonormée, on prend les vecteurs unitaires

$$\vec{u}' = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), \quad \vec{v}' = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

et donc $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ est une base orthonormée dans laquelle A est représentée par une matrice diagonale.

On a finalement

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ et } A = PD^tP.$$

V. 5. 2. Matrices hermitiennes

Dans un espace hermitien, les matrices symétriques ne sont pas suffisantes pour caractériser les matrices diagonalisables dans des bases orthonormées.

Par exemple la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

est symétrique mais elle n'est même pas diagonalisable !

Définition

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n; 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La conjuguée de A, notée $\overline{A}$, est la matrice carrée (n, n) dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. La transconjuguée de A est la transposée de la conjuguée de A, elle est notée A^*.

Donc $A^* = {}^t\overline{A}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 3 \end{pmatrix},\ \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -2i & 3 \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit A une matrice carrée (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$. On dit que A est hermitienne si $A = A^*$.

Exemple

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \ \overline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}, \ B^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

et donc B est hermitienne.

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée si et seulement si A est hermitienne.

Une proposition intermédiaire importante ...

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne. Alors

- les sous-espaces propres associés aux valeurs propres de A sont deux à deux orthogonaux.
- les valeurs propres de A sont réelles.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De même ici, si A est hermitienne, il existe une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Que peut-on dire de plus sur la matrice P ? Vérifie-t-elle des propriétés particulières ?

Dans le cas des espaces hermitiens, elle est en fait unitaire.

Définition

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que P est unitaire si $P \cdot P^* = P^* \cdot P = I_n$. Autrement dit si P est inversible et $P^{-1} = P^*$.

Proposition

Soient E un espace hermitien de dimension n et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors P est unitaire si et seulement si P est la matrice de passage d'une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E à une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E.

Conclusion ...

Théorème Spectral

Soit A une matrice réelle (resp. complexe). Alors il existe une matrice P orthogonale (resp. unitaire) et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ si et seulement si A est symétrique (resp. hermitienne).

Suites et séries numériques

Suites numériques

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne le *corps* des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le *corps* des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Rappel

- Pour tout nombre complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. On a

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \; a = \rho\cos(\theta), \; b = \rho\sin(\theta).$$

- Si x est réel alors la valeur absolue $|x|$ coïncide avec le module de x.

Définition

Un suite numérique réelle est une suite de nombres réels

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

et une suite numérique complexe est une suite de nombres complexes

$$u_0, \cdots, u_n, \cdots$$

Formellement, c'est une application

$$u : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{K}, \\ n \mapsto u_n, \end{cases}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, selon on considère les suites réelles ou complexes.

- On note par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) la suite.
- On appelle u_n le terme général de la suite (u_n).

Une suite peut être définie de multiples façons :

- en donnant explicitement le terme général u_n en fonction de n :
  exemples : $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = (1+i)^n$, ...
- par récurrence :
  exemples : $u_{n+1} = u_n + 3$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n$, ...
- par d'autres moyens plus ou moins théoriques ou pratiques :
  exemples : u_n est la n-ième décimale de π, u_n est la population mondiale en l'année n, ...
- $\cdots$

Remarque

L'espace des suites de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Définition

Soit $r > 0$ et $a \in \mathbb{K}$. On appelle disque de rayon r et de centre a dans $\mathbb{K}$, l'ensemble

$$D_r(a) = \{x \in \mathbb{K},\ |x - a| \leq r\}.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, alors

$$D_r(z_0) = \left\{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq r\right\}$$

  ce qui représente dans le plan un *disque* de rayon r et de centre (x_0, y_0).
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $D_r(a)$ est *l'intervalle* $[a - r, a + r]$.

Définition

Soit $a \in \mathbb{K}$. Un sous-ensemble $V \subseteq \mathbb{K}$ est appelé un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $D_r(a) \subseteq V$.

Convergence

Définition

Soient (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout $r > 0$, il existe $N_r \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_r$, on ait $u_n \in D_r(a)$.

Définition équivalente

On dit que a est la limite de (u_n) et on note $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ si pour tout voisinage V de a, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_V$, on ait $u_n \in V$.

Convergence

On dit que (u_n) est convergente s'il existe $a \in \mathbb{K}$ tel que $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$.
Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemples

- $u_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- $u_n = \frac{n}{n+1}$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.
- $u_n = \frac{n}{n+1} + i\frac{2n^2}{n^2+2}$, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1 + 2i$.
- $u_n = z^n, z \in \mathbb{C}$, avec $0 \leq |z| < 1$, $\lim_{n \to +\infty} z^n = 0$.

Limite infinie

Définition

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, si

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \, (n \geq N_M \Rightarrow u_n \geq M).$$

- On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, si

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \, (n \geq N_M \Rightarrow u_n \leq M).$$

Exemples

- $u_n = n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- $u_n = -\ln n$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarque

Si (u_n) est une suite complexe, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ n'a pas de sens.

Proposition

Soit (z_n) une suite de nombres complexes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (z_n) est convergente,
2. les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ sont convergentes.

De plus $\lim_{n\to+\infty} z_n = a + ib$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}(z_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Im}(z_n) = b$.

Opérations sur les limites

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes de $\mathbb{K}$, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Alors :

- pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite (λu_n) est convergente de limite $\lambda \ell_1$,
- la suite $(u_n + v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 + \ell_2$,
- la suite $(u_n v_n)$ est convergente de limite $\ell_1 \ell_2$,
- si $\ell_2 \neq 0$, alors $v_n \neq 0$ pour n assez grand et u_n / v_n est convergente de limite ℓ_1 / ℓ_2.

Comparaison des suites réelles

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. Si (u_n) et (v_n) sont convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2 alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Théorème des gendarmes

Soient (a_n), (b_n) et (u_n) trois suites réelles telles que

$$\begin{cases} a_n \leq u_n \leq b_n \ \text{ pour } n \text{ assez grand}, \\ (a_n) \text{ et } (b_n) \ \text{ convergent vers une même limite } \ell. \end{cases}$$

Alors (u_n) est convergente de limite ℓ.