

**CONTRÔLE CONTINU 1, SUJET 2****Mercredi 07 octobre 2020, 12h15-13h****Corrigé****Questions de cours**

- Donner la définition de l'image d'une application linéaire  $f : E \rightarrow F$ . (2 pts)  
**L'image de  $f : E \rightarrow F$  est le sous-espace vectoriel  $\text{Im}(f) = f(E) = \{f(\vec{v}) \in F \mid \vec{v} \in E\}$  de  $F$ .**
- Soient  $E$  et  $F$  deux sous espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. Donner la formule de Grassmann. (2 pts)  
**Pour  $E$  et  $F$  sous-espaces d'un même espace vectoriel, la formule de Grassmann est  $\dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F)$ .**

**Exercice 1**

On considère  $\mathbb{R}^2$  muni de la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Soit  $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  la famille de vecteurs

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que  $\mathcal{C}$  est une famille libre.  
**Il faut montrer que  $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$  si et seulement si  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . On peut écrire cette égalité comme**

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**et appliquer la méthode de pivot pour la résoudre :**

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 - \frac{3}{5}l_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_1 - \frac{20}{7}l_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Donc, on a une solution unique  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  et  $\mathcal{C}$  est bien libre.**

- En déduire que c'est une base de  $\mathbb{R}^2$ . (1 pt)  
**Il suffit de noter simplement qu'une famille libre de deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension deux est une base.**  
**Autrement dit,  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  si elle est libre et génératrice de  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons montré qu'elle est libre, donc il nous reste seulement d'observer qu'elle est génératrice, c'est à dire que**

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \{\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

- Donner la matrice de passage  $P_{\mathcal{BC}}$  de la base canonique  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{C}$ . (1 pt)  
**La matrice de passage  $P_{\mathcal{BC}}$  est la matrices des composantes de  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  exprimées dans la base canonique  $\mathcal{B}$ . Donc,**

$$P_{\mathcal{BC}} = M_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^2$  exprimé dans la base canonique  $\mathcal{B}$ . Exprimer ce vecteur dans la base  $\mathcal{C}$ . (2 pts)  
**On doit trouver les composantes du vecteurs  $\vec{u}$  dans la base  $\mathcal{C}$ , c'est à dire  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  tels que**

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}.$$

**Dans la base canonique, on écrit cette équation**

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Pour trouver  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  en fonction de  $x$  et  $y$ , il faut donc résoudre le système d'équations

$$\begin{aligned}x &= 5\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ y &= 3\lambda_1 + 2\lambda_2.\end{aligned}$$

On note que

$$\begin{aligned}3x - 5y &= (15 - 15)\lambda_1 + (9 - 10)\lambda_2 = -\lambda_2 \\ 2x - 3y &= (10 - 9)\lambda_1 + (6 - 6)\lambda_2 = \lambda_1,\end{aligned}$$

et on arrive à la solution

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -3x + 5y \end{pmatrix}_C.$$

4. Calculer  $P^{-1} = P_{CB}$ . (2 pts)

Comme indiqué dans la question, l'inverse de la matrice de passage  $P_{BC}$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  est la matrice de passage  $P_{CB}$  de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{B}$ . Pour exprimer les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  de la base canonique dans la base  $\mathcal{C}$ , on peut évaluer l'expression pour  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_B$  dans la base  $\mathcal{C}$  à  $(x = 1, y = 0)$  et  $(x = 0, y = 1)$  respectivement:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2(1) - 3(0) \\ -3(1) + 5(0) \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}_C \\ \vec{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 2(0) - 3(1) \\ -3(0) + 5(1) \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}_C.\end{aligned}$$

La matrice est donc

$$P^{-1} = P_{CB} = M_C(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

On pourrait également appliquer la formule pour l'inverse d'une matrice de type  $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

à  $P_{BC}$  pour retrouver le même résultat. On peut aussi comparer avec la question précédente et vérifier que

$$M_C(\vec{u}) = P_{CB}M_B(\vec{u})$$

exactement comme prévu.

## Exercice 2

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  défini, pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , par

$$f(x, y, z) = (x - y + z, -x + y - z, 0)$$

dans la base canonique  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

1. Déterminer la matrice  $A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f)$  de  $f$  dans la base canonique. (2 pts)

On cherche une matrice  $A$  de type  $3 \times 3$  qui vérifie  $f(\vec{v}) = A\vec{v}$ . Pour  $\vec{v}$  exprimé dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

aussi dans la base canonique, et

$$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que

$$\mathcal{C}_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une base du noyau  $\text{Ker}(f)$ .

(2 pts)

**Le noyau de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  défini par**

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\vec{0}_F) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_F\}.$$

**On trouve que  $f(x, y, z) = 0$  si  $x - y + z = 0$ ; alors son noyau est le plan normal au vecteur  $\vec{n} = (1, -1, 1)$  qui passe par l'origine,**

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

**Pour montrer que**

$$\mathcal{C}_1 = (\vec{u}_1, \vec{u}_2), \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**est une base de  $\text{Ker}(f)$ , il suffit de noter que**

- $f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2) = 0$ , donc  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \text{Ker}(f)$ .
- Il n'existe aucun scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$ , alors les deux vecteurs sont linéairement indépendants
- $\text{Ker}(f)$  a dimension 2, donc il est engendré par toutes paires de vecteurs linéairement indépendants qui appartiennent à lui

$\mathcal{C}_1$  est donc libre et génératrice de  $\text{Ker}(f)$ .

3. Que peut-on dire du rang de  $f$  ?

(1 pt)

**Le rang de  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  peut être déterminé par la formule du théorème de rang, en notant que le noyau de  $f$  a dimension 2 :**

$$\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1.$$

4. On admettra que  $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  où

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)$  en fonction des vecteurs  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  et  $\vec{u}_3$ .

En déduire la matrice  $A' = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f)$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

(3 pts)

**On a déjà vérifié que  $f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2) = 0$ , et on calcule  $f(\vec{u}_3) = (2, -2, 0) = 2\vec{u}_3$ . Alors, la matrice de  $f$  dans cette base est**

$$A' = M_{\mathcal{C}\mathcal{C}}(f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

5. Calculer les déterminants des matrices  $A$  et  $A'$ .

(2 pts)

**Les déterminants  $\det A$  et  $\det A'$  sont tous les deux égaux à zéro car leurs colonnes et lignes ne sont pas linéairement indépendants.**