

CONTRÔLE CONTINU 1**Mercredi 12 octobre 2022****Durée : 1 heure (10h à 11h)**

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

NOM :**PRENOM :****GROUPE DE TD :****Question de cours - (points)**

1. Soit (E, \star) , un ensemble muni d'une loi. Quand dit-on que (E, \star) est un groupe ?
2. Donner la définition du rang d'une application linéaire f .
3. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ (une application linéaire). Énoncer correctement le théorème du rang.

Réponse:

Exercice 1 - (points)

Soit $G = \{e, a, b\}$, un groupe multiplicatif à **trois éléments distincts** avec e l'élément neutre.

1. Montrer que $ab = ba = e$ (**Indication** : on pourra raisonner par absurde pour montrer que $ab = a$ est impossible et que $ab = b$ est aussi impossible)

Réponse:

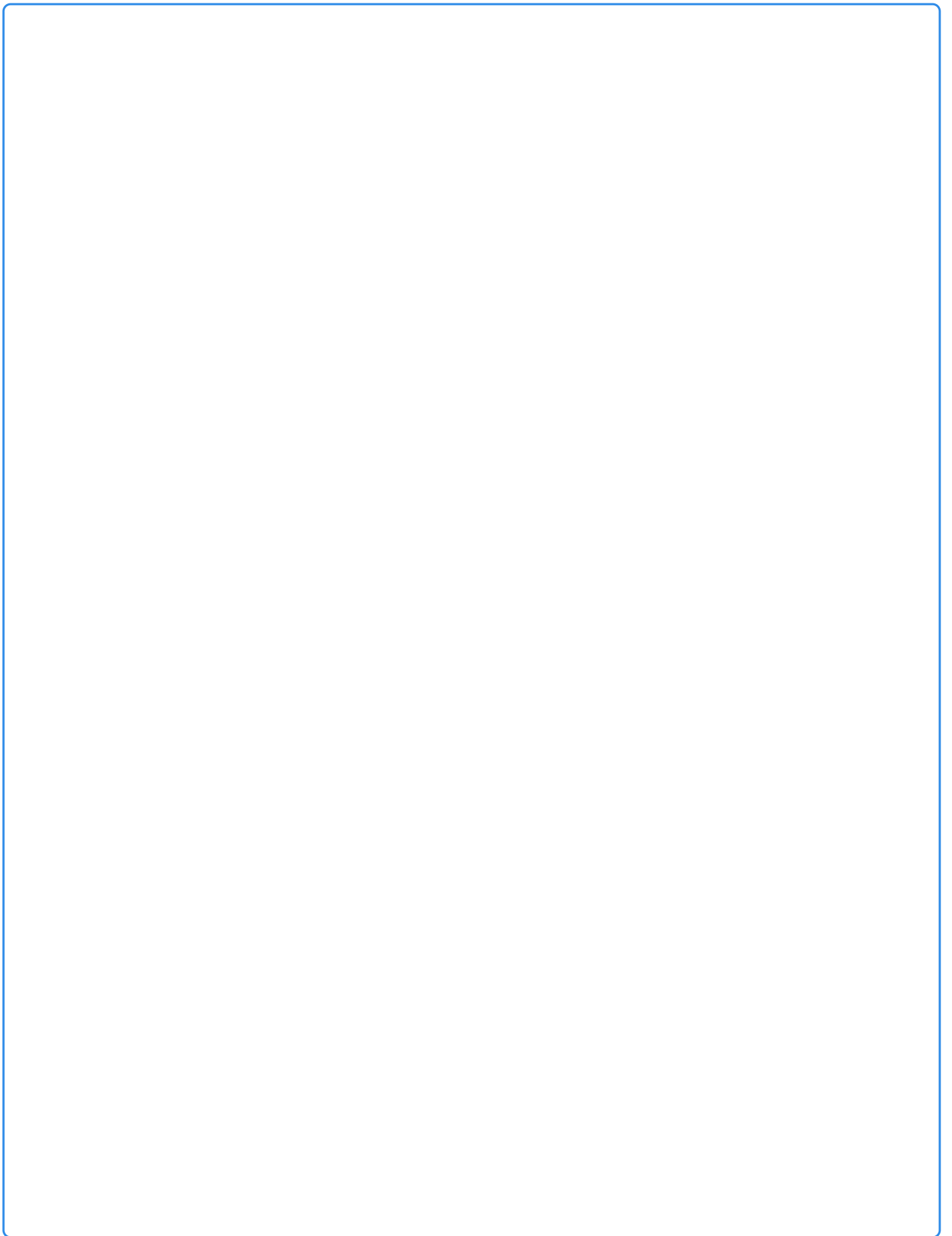
Exercice 2 (points)

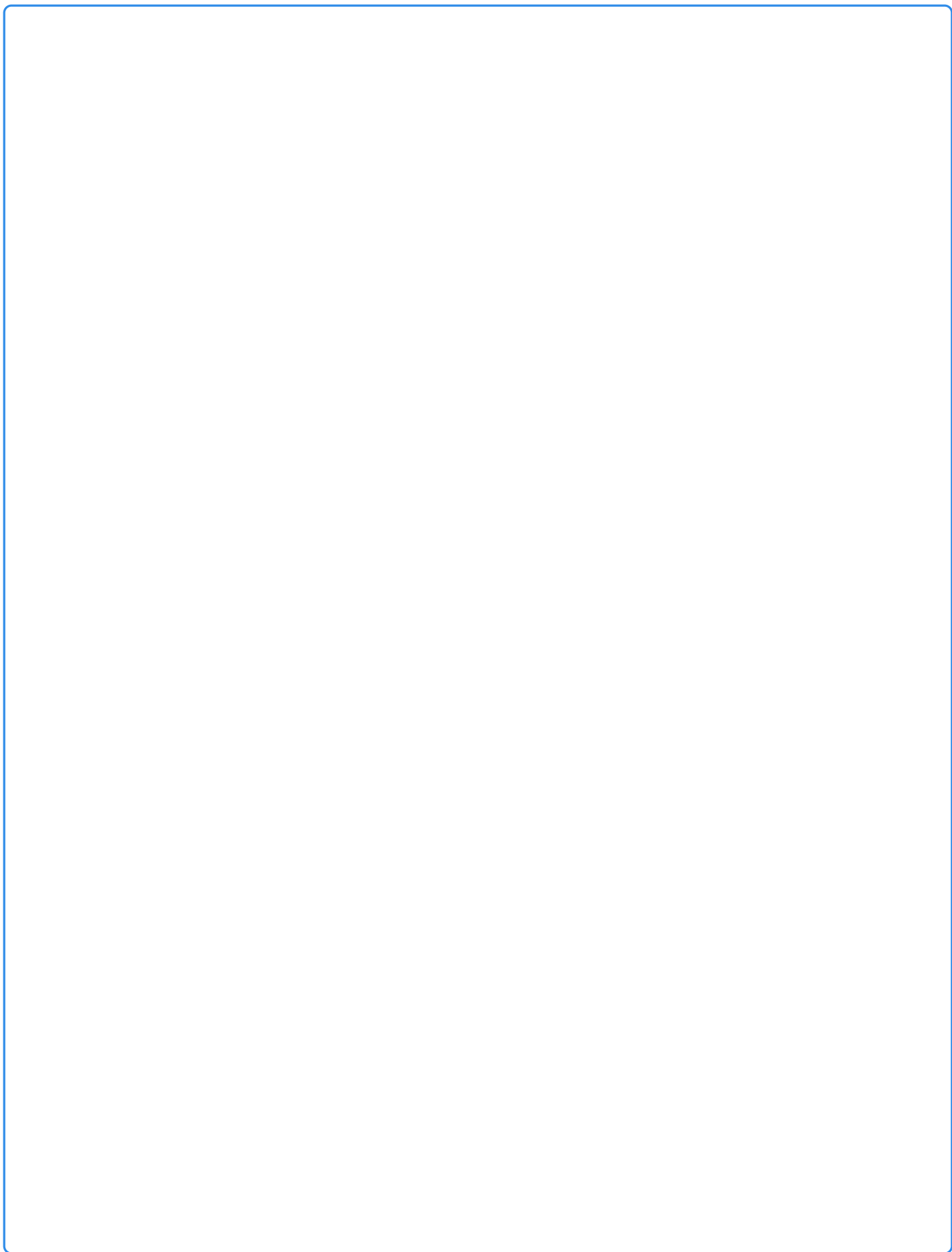
Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (-3x - y + z, 8x + 3y - 2z, -4x - y + 2z).$$

1. Déterminer une base du noyau de f et sa dimension. (pts)
2. L'application f est-elle injective ? (pts)
3. Déterminer le rang de f . L'application est-elle surjective ? (pts)
4. Déterminer une base de l'image de f . (bonus)

Réponse:





Exercice 3 (points)

Soient les vecteurs $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ et $\vec{w} = (1, 1, 0)$ de \mathbb{R}^3 .

1. La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est-elle libre ?
2. La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est-elle génératrice de \mathbb{R}^3 ?
3. La famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forme t-elle une base \mathbb{R}^3 ?

Réponse:

Exercice 4 (3 points)

Montrer que l'ensemble des nombres non divisibles par 3 n'est pas un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Réponse: