

CONTRÔLE CONTINU 3

Mercredi 08 Décembre 2021

Durée : 1 heure (11h30 -12h30)

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

CONTENU DU CONTRÔLE : Questions de cours, Exercice 1, Exercice 2, Exercice 3
ATTENTION : Il y a trois exercices !

NOM :

PRENOM :

GROUPE DE TD :

Questions de cours - (2 points)

1. Qu'est-ce qu'une série géométrique et sous quelle(s) condition(s) converge-t-elle ? (1 pt)
2. Qu'est-ce qu'une série alternée ? Citez le critère de convergence des séries alternées. (1 pt)

Réponse:

1) Une série est dite géométrique si son terme général s'écrit sous la forme $u_n = q^n$. Ainsi la série s'écrit $\sum_{n \geq 0} q^n$. Une telle série converge ssi $|q| < 1$.

Barème 1/2 pts pour la forme de la série
 1/2 pts pour la condition de convergence

2) Une série est dite alternée si elle s'écrit sous la forme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ avec $a_n \geq 0$. Le critère de convergence est que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ doit être décroissante vers 0 autrement dit (i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante
 (ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Barème 1/2 pts pour la forme
 1/2 pts pour (i) et (ii)

Exercice 1 - (8 points)

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique, on considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans une base orthonormée ? Justifier votre réponse. (1 pt)
2. Déterminer les valeurs propres de A . (2 pts)
3. Déterminer une base orthonormée de chaque sous-espace propre de A . (2 pts)
4. Trouver une matrice orthogonale O telle que $D = {}^tOAO$ soit une matrice diagonale. (1 pt)
5. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. (Indication : exprimer A^n d'abord en fonction de D , O et tO .) (2 pts)

Réponse:

1) A est une matrice symétrique à coefficients réels alors elle est diagonalisable dans une base orthonormée.
 → 1 point si l'étudiant remarque que c'est symétrique.

2) $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda((1-\lambda)^2 - 1) = -\lambda(-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2(2-\lambda)$
 les valeurs propres sont $\lambda = 0$ (double) et $\lambda = 2$ (simple)

→ 1/2 pts pour $|A - \lambda I|$; 1/2 pts pour la factorisation et 1 pt pour les deux valeurs propres

3) Soit E_0 l'espace propre associé à $\lambda = 0$.
 Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0$ alors $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1/2 pts ici.
 $\Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z$ ainsi $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 par suite $E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
 de plus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont pas proportionnels alors ils 1/2 pts ici
 constituent une base de E_0 . Notons les \vec{v}_1 et \vec{v}_2 respectivement.

• Soit E_1 l'espace propre associé à $\lambda = 2$
 Si $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1$ alors $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1/2 pts ici
 $\Rightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = z \\ y = 0 \end{cases}$ par suite $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

ainsi $E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Par suite le vecteur $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de E_1 . 1/2 pts ici

Il nous reste à normaliser les vecteurs \vec{v}_1, \vec{v}_2 et \vec{v}_3 puisqu'ils sont déjà orthogonaux.

$$\begin{aligned} \text{soit } \vec{w}_1 &= \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \text{soit } \vec{w}_2 &= \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{soit } \vec{w}_3 &= \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{la base orthonormée} \\ \text{cherchée est} \\ \left\{ \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3 \right\} \end{array} \right\}$$

→ 1/2 pts ici

4) A étant diagonalisable alors il existe une matrice diagonale D et une matrice de passage, telle que $D = O^{-1}AO$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et O obtenue grâce à la base orthonormée $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$, c'est-à-dire que O est une matrice orthogonale donc vérifie $O^{-1} = {}^tO$.

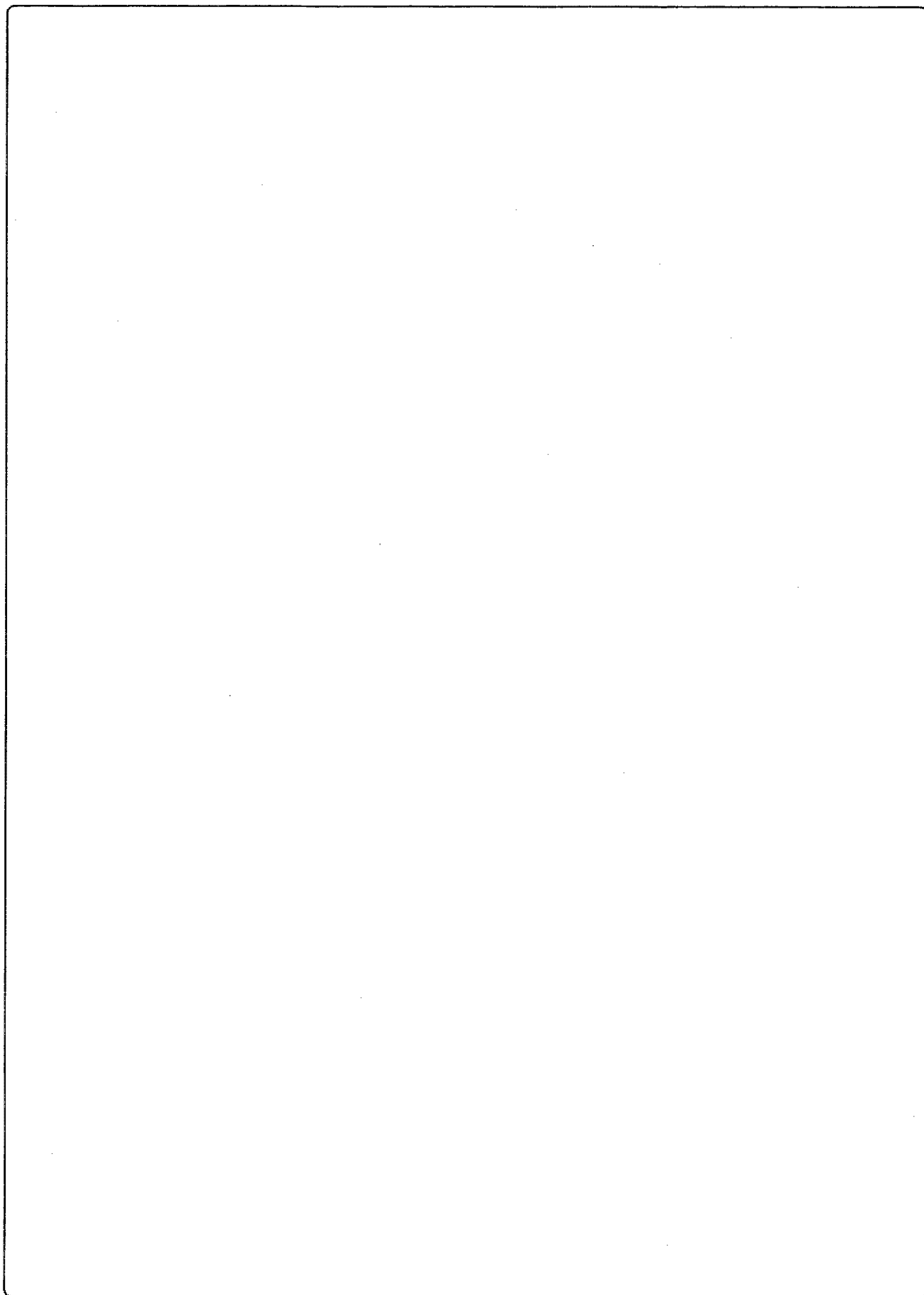
Donc $D = {}^tOAO$. Rq $O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 1pt ici
(1/2 pts si l'étudiant donne D)

5) on a $A = ODO^t \Rightarrow A^n = O D^n O^t$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2^n/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2^n/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

1/2 pts ici 1pt ici



Exercice 2 (4 points) Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

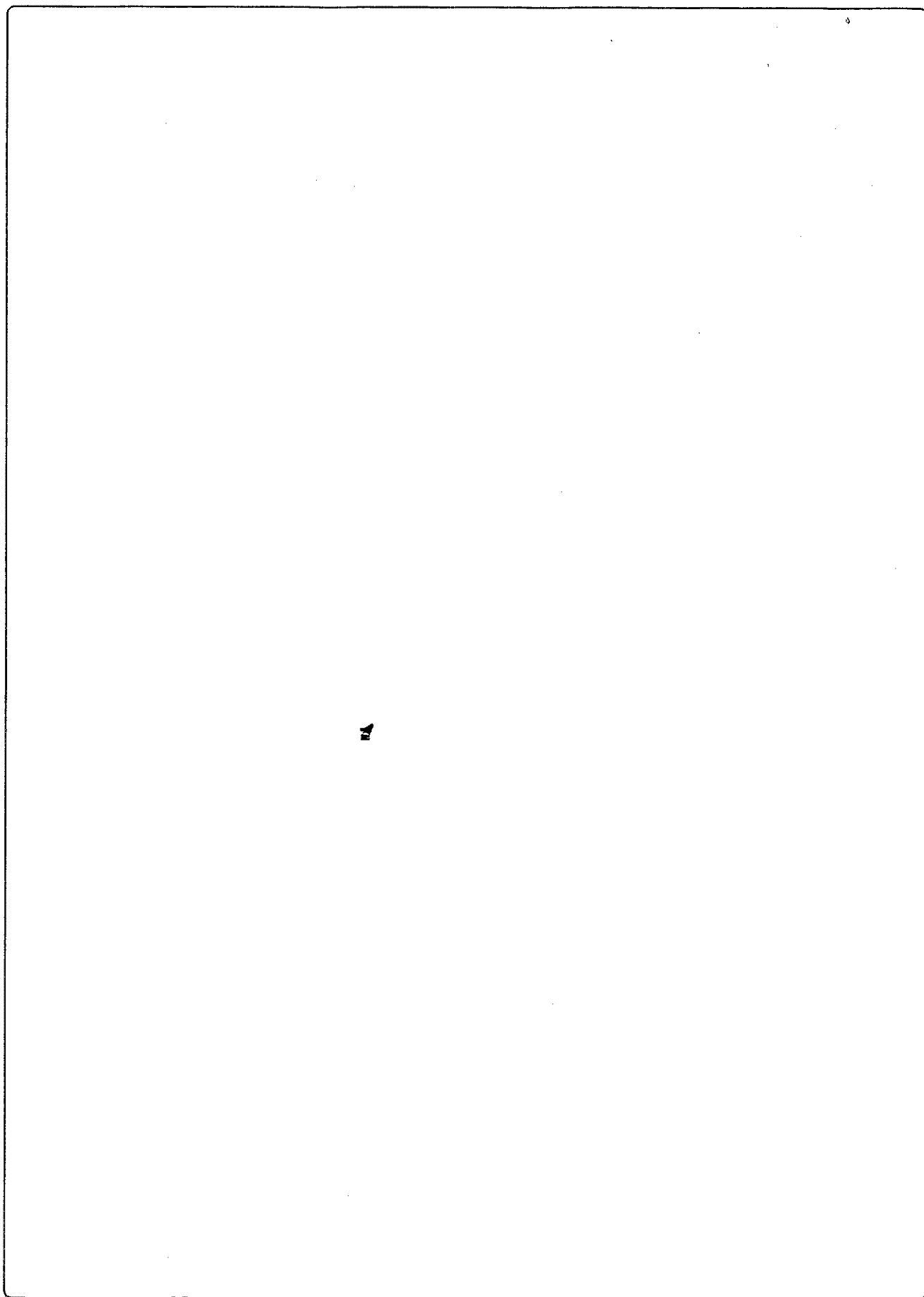
1. $\sum_{n \geq 1} u_n$ avec $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Ici on pourra s'appuyer sur le développement limité à l'ordre 2
suivant : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. (2 pts)

2. $\sum_{n \geq 1} v_n$ avec $v_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$. (2 pts)

Réponse:

1) $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$ à partir du DL à l'ordre 1
 $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est de même nature que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}}$
 d'après le théorème de comparaison. 1pt ici
 Or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^{1/2}}$ qui est une série de Riemann
 divergente
 d'où $\sum_{n \geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge. 1pt ici

2) $\sum_{n \geq 1} v_n$ avec $v_n = \frac{n^2}{(n-1)!}$ utilisons le critère de d'Alembert 1pt ici
 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^2}{n!} \times \frac{(n-1)!}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \times \frac{1}{n} = \frac{(n+1)^2}{n^3}$
 ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{n^3} = 0 < 1$ ainsi
 $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. 1pt ici



Exercice 3 (6 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. On considère G le sous-espace vectoriel de E défini par l'équation $x + y = 0$.

1. Déterminer une base orthonormée de G . (2 pts)
2. Pour un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ de E , déterminer sa projection orthogonale sur G . (2 pts)
3. Soit $\vec{v} = (1, 2, 1)$ un élément de E . Déterminer la distance de \vec{v} à G . (Indication : le chemin le plus court entre un point et un plan est un segment de droite perpendiculaire au plan.) (2 pts)

Réponse:

1) on cherche une base orthonormée de G

soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de G alors par définition

on a $x + y = 0 \Rightarrow x = -y$. Par suite $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$
c'est-à-dire $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ce qui montre que $G = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ or ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels alors ils constituent une base de G .
→ [4pt ici]

Ces deux vecteurs étant déjà orthogonaux, il reste à les normer

$$\text{soit } \vec{u}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ "déjà normé"}$$

→ [1pt ici]

2) soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E$ on veut $\text{pr}_G(\vec{u})$ qu'on va noter \vec{u}^*

$$\text{alors } \vec{u}^* = \text{pr}_{\vec{u}_1}(\vec{u}) + \text{pr}_{\vec{u}_2}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2$$

[1/2 pts pour la formule]
$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u}^* = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{-x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ \frac{-x+y}{2} \\ z \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u}^\perp = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{2} \\ -\frac{x+y}{2} \\ z \end{pmatrix}$$

c'est la projection orthogonale de \vec{u} sur G .

1,5 pts ici pour le calcul

3) Notons $d(\vec{v}, G)$ la distance de \vec{v} à G .

d'après l'indication $d(\vec{v}, G) = \|\vec{v} - \text{pr}_G(\vec{v})\|$ 1 pt pour la formule

~~or~~ $\text{pr}_G(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{1-2}{2} \\ -\frac{1+2}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'après la question précédente

~~4 pts~~

1/2 pt ici

Ainsi $d(\vec{v}, G) = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}}$

$$\Rightarrow d(\vec{v}, G) = \frac{3}{2} \sqrt{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

1/2 pt ici

