

CONTRÔLE CONTINU 3**Mardi 11 janvier 2022****Durée : 2 heures (14h00 -16h00)**

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une feuille A4 recto-verso est autorisée. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

CONTENU DU CONTRÔLE : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 3, Exercice 4
ATTENTION : Il y a 4 exercices à faire !**NOM :****PRENOM :****GROUPE DE TD :****Exercice 1 (6 points)**

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A . (1 pt)
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A . (1 pt)
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (2 pts)
4. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$a_{n+1} = -a_n - 2b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n + 4b_n, \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

Montrer que

$$a_n = 5 - 2^{n+2}, \quad b_n = -5 + 3 \cdot 2^{n+1}, \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(2 pts)

Réponse:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad P_A(X) &= \begin{vmatrix} -1-X & -2 \\ 3 & 4-X \end{vmatrix} = -(1+X)(4-X) + 6 \\ &= -(4-X+4X-X^2) + 6 \\ &= -(-X^2+3X+4) + 6 \\ &= X^2-3X+2 = (X-1)(X-2). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont 1 et 2
(chaque de multiplicité algébrique 1).

Réponse:

② soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\vec{u} \in E_1(A) &\Leftrightarrow (A - \text{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{u} = (x, y) = (-y, y) = y(-1, 1).$$

D'où $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. La famille $(\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une famille libre et génératrice de $E_1(A)$ et est donc une base.

$$\begin{aligned}\vec{u} \in E_2(A) &\Leftrightarrow (A - 2\text{Id}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x + 2y = 0.\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{u} = (x, y) = \left(-\frac{2}{3}y, y\right) = y\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$$

$$\text{D'où } E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

De même $(\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \end{pmatrix})$ constitue une base de $E_2(A)$.

③ En posant $P = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

Réponse:

On a $\det(P) = -1 + \frac{2}{3} = \frac{-3+2}{3} = \frac{-1}{3}$ et

$$P^{-1} = \frac{1}{\frac{-1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

D'où $A^n = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, n \geq 0$

$$= \begin{pmatrix} -1 & \frac{-2}{3} \cdot 2^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$
$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -3 + 3 \cdot 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}, n \geq 0.$$

④ On a $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et par récurrence $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$

Donc $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -3 + 3 \cdot 2^n & -2 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} a_n = (3 - 2^{n+1}) + (2 - 2^{n+1}) \\ b_n = (-3 + 3 \cdot 2^n) + (-2 + 3 \cdot 2^n) \end{cases}, n \geq 0$

Enfin $\begin{cases} a_n = 5 - 2^{n+2} \\ b_n = -5 + 3 \cdot 2^{n+1} \end{cases}, n \geq 0.$

Exercice 2 (5 points + 1 bonus)

On considère \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Soit $\vec{u} = (1, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$ et

$$F = \{ \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0 \}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . (1 pt)
2. Déterminer une base orthonormée (\vec{v}_1, \vec{v}_2) de F . (2 pts)
3. Donner un vecteur \vec{v}_3 tel que la famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ soit une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . (1 pt)
4. On note $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la projection orthogonale sur F . Déterminer $\pi(\vec{v}_1)$, $\pi(\vec{v}_2)$ et $\pi(\vec{v}_3)$. (1 pt)
5. (**Bonus**) Déterminer la matrice de π par rapport à la base \mathcal{B} . (1 pt)

Réponse:

① On a $\langle \vec{u} | \vec{0} \rangle = 0$ et donc $\vec{0} \in F$. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{a}, \vec{b} \in F$. Alors $\langle \vec{u} | \vec{a} + \lambda \vec{b} \rangle = \lambda \langle \vec{u} | \vec{a} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{b} \rangle = 0$.

Donc $\lambda \vec{a} + \vec{b} \in F$ et donc F est un s.e.v.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad F &= \left\{ \vec{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x, y, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1) \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La famille (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est libre et génératrice, donc c'est une base de F . On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthonormée. On pose

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2 | \vec{v}_1 \rangle \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+1}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

La famille (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est orthogonale et constitue une base de F .

③ On a $\langle \vec{u} | \vec{v}_1 \rangle = 0$ et $\langle \vec{u} | \vec{v}_2 \rangle = 0$,
 donc on peut prendre $\vec{v}_3 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est orthogonale. C'est une famille libre constituée de 3 vecteurs et est donc une base de \mathbb{R}^3 .

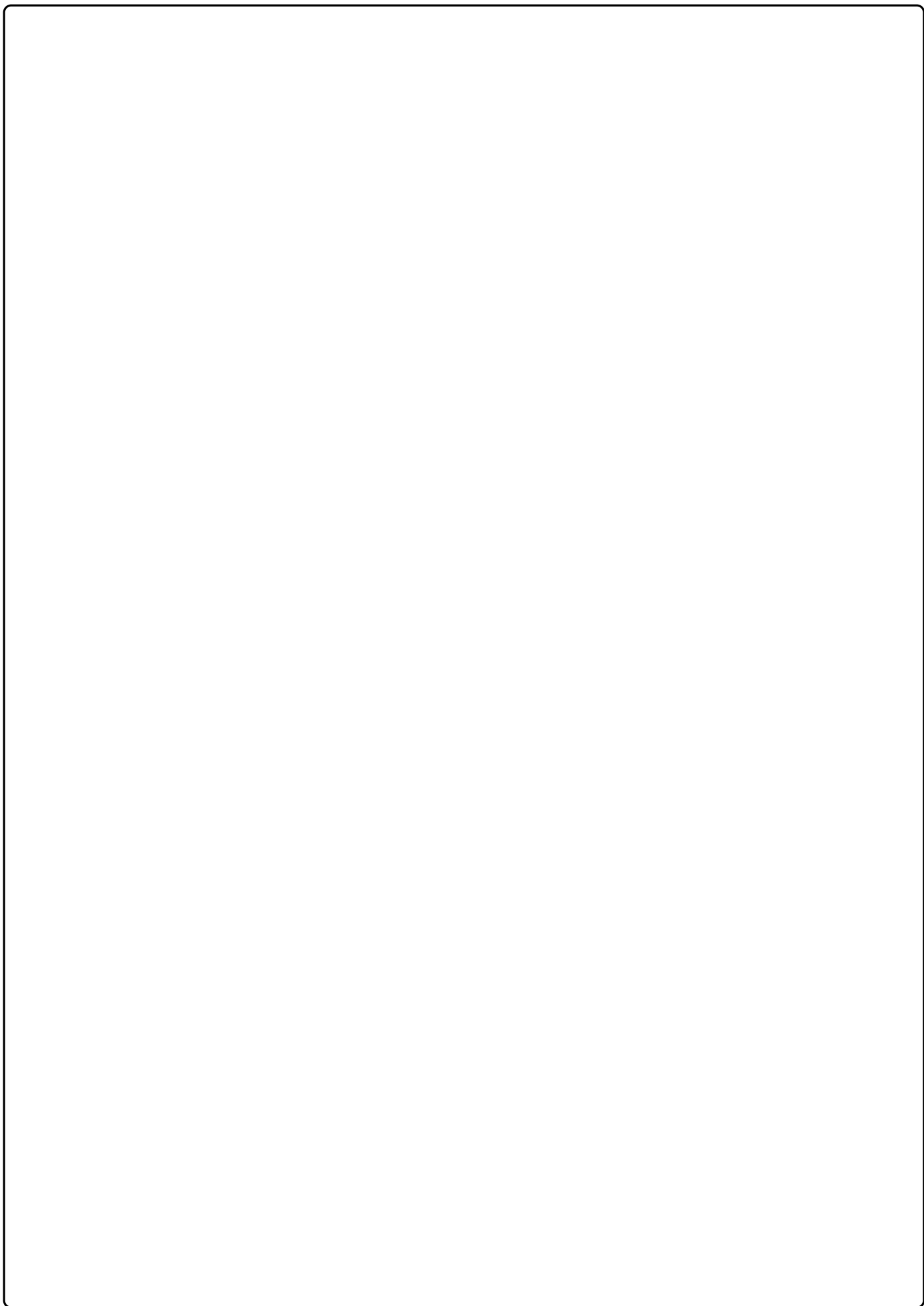
④ Par définition $\pi(\vec{v}_1) = \vec{v}_1$, $\pi(\vec{v}_2) = \vec{v}_2$
 et $\pi(\vec{v}_3) = \vec{0}$ car $\vec{v}_3 \perp F$.

⑤ Comme

$$\begin{aligned} \pi(\vec{v}_1) &= \vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 \\ \pi(\vec{v}_2) &= \vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 \\ \pi(\vec{v}_3) &= \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 \end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{U}_B(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Exercice 3 (4 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $u_n \sim_{\infty} \frac{1}{n^{3/4}}$; $n \geq 1$. (2 pts)
2. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est-elle absolument convergente ? Est-elle convergente ? Est-elle semi-convergente ? (2 pts)

Réponse:

- ① $\sin(x) \sim_0 x$ et donc $\sin\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^{1/4}}$
 D'où $\frac{\sin\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)}{\sqrt{n}} \sim_0 \frac{1}{n^{1/4}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{1}{n^{3/4}}.$
- ② On a $u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)}{\sqrt{n}} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ (car $\sin(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$)
 et donc $|u_n| = u_n$. Comme $u_n \sim_0 \frac{1}{n^{3/4}}$ et comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/4}}$ est une série de Riemann divergente, par le critère de comparaison $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est divergente. Donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas absolument convergente et en particulier $\sum_{n \geq 0} u_n$ n'est pas convergente, ni semi-convergente.

Exercice 4 (7 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' + y = f(x)$$

où $f(x) = \ln(x^2 - 8x + 12)$.

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 des applications

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{2-x}, \quad h : x \mapsto h(x) = \frac{1}{6-x}.$$

(1 pt)

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 des applications

$$x \mapsto \ln(2-x), \quad x \mapsto \ln(6-x).$$

(2 pts)

3. Montrer que le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application

$x \mapsto f(x) = \ln(x^2 - 8x + 12)$ est donné par

$$f(x) = \ln(12) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+3^n}{n6^n} \right) x^n.$$

(1 pt)

4. Montrer que a_n est donnée par la formule

$$a_0 = \ln(12), \quad a_n = \frac{-(1+3^n)}{n(n+1)6^n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(2 pts)

5. Calculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue.

(1 pt)

Réponse:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad g(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \quad \text{valable pour } \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \\ &\text{et donc pour } |x| < 2. \\ \text{De même} \quad h(x) &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n} \cdot x^n \end{aligned}$$

Réponse:

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^{n+1}} x^n \quad \text{valable pour } |x| < 6.$$

(2) Comme $\frac{1}{2-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$, par intégration on a

$$\int_0^t \frac{1}{2-x} dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n$$
$$= \ln(2-t) + \ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot t^{n+1}$$

En utilisant le changement de variable $m=n+1$

$$\ln(2-t) = \ln(2) - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m 2^m} \cdot t^m.$$

$$\text{De même } -\ln(6-t) + \ln(6) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot t^{n+1}$$

$$\text{et donc } \ln(6-t) = \ln(6) - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m 6^m} \cdot x^m.$$

(3) On a $\ln(x^2 - 8x + 12) = \ln(2-x) + \ln(6-x)$
pour tout $x \in]-2, 2[$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \ln(x^2 - 8x + 12) &= \ln(2) + \ln(6) \\ &\quad - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m 2^m} x^m - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m 6^m} x^m \\ &= \ln(12) - \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m 2^m} + \frac{1}{m 6^m} \right) x^m \\ &= \ln(12) - \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1+3^m}{m 6^m} \right) x^m \end{aligned}$$

Réponse:

④ En remplaçant dans l'équation (E):

$$x. \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} (n a_n + a_n) x^n = f(x)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_n x^n = f(x)$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} a_0 = \ln(12), \\ (n+1) a_n = \left(\frac{1+3^n}{n \cdot 6^n} \right), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{et donc } \begin{cases} a_0 = \ln(12), \\ a_n = \left(\frac{1+3^n}{n(n+1) 6^n} \right), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

⑤ On utilise le critère de D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^{n+1}}{(n+1)(n+2) 6^{n+1}} \cdot \frac{n(n+1) 6^n}{1+3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1+3^{n+1}}{1+3^n} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+3^{n+1}}{1+3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{3^n} \left(\frac{1}{3^n} + 3 \right)}{\cancel{3^n} \left(\frac{1}{3^n} + 1 \right)} = 3.$$

$$\text{Comme } \frac{n}{n+2} \rightarrow 1, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1 \cdot \frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } R = 2.$$