

**CONTRÔLE CONTINU 2****Mercredi 10 Novembre 2021****Durée : 1 heure (11h30 -12h30)****CORRECTION****Questions de cours - (2 points)**

1. Soit  $f$  un endomorphisme sur un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Donner la définition d'un vecteur propre de  $f$  et de la valeur propre qui lui est associée. (1 pt)

$\vec{u} \in E$  est un vecteur propre de  $f$  si  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ . La valeur propre associée à  $\vec{u}$  est  $\lambda$ .

2. Donner la définition d'une matrice inversible. (1 pt)

Une matrice inversible est une matrice carrée  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

— pour laquelle il existe une matrice inverse  $M^{-1}$  vérifiant

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I_n$$

où  $I_n$  est la matrice d'identité de taille  $n \times n$

ou (selon un théorème du cours)

— dont le déterminant est non-nul.

**Exercice 1 - (8 points)**

Soit  $A$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $A$ . (1,5 pts)

Le polynôme caractéristique de  $A$  est

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3)$$

alors on a

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) + 1) + ((1-\lambda) + 1) + (1 - (3-\lambda)) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \end{aligned}$$

2. Montrer que les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 1$ , de multiplicité algébrique 1, et  $\lambda_2 = 2$  de multiplicité algébrique 2. (1,5 pts)

Les valeurs propres de  $A$  sont les racines de son polynôme caractéristique  $p_A(\lambda)$ . On factorise  $p_A(\lambda)$  et trouve

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$$

alors les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_1 = 1$  à multiplicité 1 et  $\lambda_2 = 2$  à multiplicité 2 .

*Alternatif :* Si 1 et 2 sont valeurs propres de  $A$  alors il existe des sous-espaces propres non-triviaux

$$E_1(A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{u} = \vec{u}\}, \quad E_2(A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

Ceci est démontré dans la réponse à la question 3 , où on trouve que la dimension de  $E_1(A)$  (ou sa multiplicité géométrique) est 1 et que la dimension de  $E_2(A)$  est 2 . La multiplicité algébrique de chaque valeur propre est plus grande ou égale à sa multiplicité géométrique. Comme la somme des multiplicités algébriques de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vaut 3, leurs multiplicités algébriques sont forcément égales à leurs multiplicités géométriques.

3. *Donner une base de chaque sous-espace propre de  $A$ .* (3 pts)

On cherche d'abord une base du sous-espace propre associé à  $\lambda_1 = 1$ ,

$$E_1(A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

Si un vecteur  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  appartient à  $E_1(A)$ , alors

$$(A - 1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$x = y = -z.$$

$E_1(A)$  est donc un sous-espace à dimension 1 , engendré par le vecteur  $(1, 1, -1)$ . On a donc une base propre

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

de  $E_1(A)$  .

Pour le sous-espace propre associé à  $\lambda_2 = 2$ ,

$$E_2(A) = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

Si un vecteur  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  appartient à  $E_2(A)$ , alors

$$(A - 2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$x = y + z.$$

$E_2(A)$  est donc un sous-espace à dimension 2 . Il est engendré par deux vecteurs non-colinéaires, par exemple  $(1, 1, 0)$  et  $(1, 0, 1)$ . On a donc une base propre

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de  $E_2(A)$  .

4. Justifier pourquoi  $A$  est diagonalisable.

(1 pt)

Dans la question précédente nous avons trouvé une base

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de  $\mathbb{R}^3$  composée de vecteurs propres de  $A$ . Alors  $A$  est diagonalisable par un changement de base. *Alternatif* : La multiplicité géométrique est égale à la multiplicité algébrique pour chaque valeur propre de  $A$ , donc  $A$  est diagonalisable.

5. Donner une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}AP$  est diagonale.

(1 pt)

La matrice  $D$  obtenue de  $A$  par un changement de base de la base canonique  $Can$  à la base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \oplus \mathcal{B}_2$  trouvée ci-dessus. Précisément, nous avons

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}, Can} A \mathcal{P}_{Can, \mathcal{B}} = P^{-1}AP$$

où  $P = \mathcal{P}_{Can, \mathcal{B}} = M_{Can}(\mathcal{B})$  est la matrice de passage de  $Can$  à  $\mathcal{B}$ . Nous avons donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2 (6 points)

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

1. Déterminer l'écriture matricielle du système  $(S)$ .

(1 pt)

La matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  associée au système  $(S)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et le second membre  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  est

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si on pose  $\vec{X} = (x, y, z)$ , le système  $(S)$  s'écrit

$$A\vec{X} = \vec{b}.$$

2. Trouver l'ensemble des solutions de  $(S)$ . Est-ce un espace vectoriel ?

(2 pts)

On trouve les solutions de  $(S)$  par une application du pivot de Gauss à la matrice augmentée

$$[A|\vec{b}] = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3-L_1]{L_2-2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & -3 & | & 3 \\ 0 & 3 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[L_2/3]{L_3-L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions de  $(S)$  est donc

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + z = 0, y - z = 1\},$$

autrement dit

$$\left\{ \begin{pmatrix} -t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet ensemble est une droite qui passe par les points  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 0, -1)$ . Il ne comprend pas l'origine, alors il n'est pas un espace vectoriel.

3. Déterminer le rang de la matrice associée à  $(S)$ . (1 pt)

La matrice  $A$  associée à  $(S)$  est de rang 2. Ceci peut se voir à partir de la réduction par le pivot de Gauss, car on obtient la matrice d'identité de taille  $2 \times 2$ ; on peut aussi remarquer que toute matrice  $3 \times 3$  composée des colonnes de la matrice augmentée  $[A|\vec{b}]$  a déterminant 0, alors qu'on peut extraire une matrice  $2 \times 2$  inversible de  $[A|\vec{b}]$ , par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. On considère le système  $(S)$  où le second membre est remplacé par un vecteur  $\vec{b}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer pour quel  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  des solutions existent dans ce cas. (2 pts)

Comme le rang de  $A$  est inférieur à 3, l'application linéaire associée à  $(S)$  n'est pas injective et il n'existe pas forcément une solution de

$$A\vec{X} = \vec{b}$$

où  $\vec{b}$  est un vecteur arbitraire dans  $\mathbb{R}^3$ . Il existe une solution de  $A\vec{X} = \vec{b}$  si  $\vec{b}$  est dans l'image de  $A$ , autrement dit dans l'espace engendré par les colonnes de  $A$ .

*Alternatif* : Il existe une solution de  $A\vec{X} = \vec{b}$  si le rang de la matrice augmentée  $[A|\vec{b}]$  est égal au rang de  $A$ . Ceci est vérifié si  $\vec{b}$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ . On pourrait aussi construire une base de  $\mathfrak{S}A$  avec deux colonnes non-colinéaires et écrire qu'il existe une solution de  $A\vec{X} = \vec{b}$  si est seulement si

$$\vec{b} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

### Exercice 3 (4 points)

On considère la matrice réelle suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la matrice inverse  $A^{-1}$  de  $A$ . (2 pts)

On remarque que le déterminant de  $A$  vaut

$$\det A = 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 + 2 - 3 = 1;$$

comme il est non-nul, alors il existe une matrice inverse de  $A$ . On peut la trouver avec le pivot de Gauss, à partir de la matrice augmentée

$$[A|I_3] = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) :$$

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3-L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[L_2+3L_3]{L_1+2L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[L_3 \times (-1)]{L_1-L_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On trouve donc la matrice inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  un vecteur dans  $\mathbb{R}^3$ . Trouver un vecteur  $\vec{u}$  qui vérifie

$$A\vec{u} = \vec{v}.$$

(2 pts)

Si  $\vec{u}$  vérifie  $A\vec{u} = \vec{v}$ , alors

$$\vec{u} = A^{-1}A\vec{u} = A^{-1}\vec{v}$$

et on peut trouver  $\vec{u}$  avec la matrice inverse trouvée ci-dessus :

$$\vec{u} = A^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On pourrait également résoudre le système linéaire  $A\vec{u} = \vec{v}$  pour  $\vec{u}$  avec le pivot de Gauss.