

CONTRÔLE CONTINU FINAL DE SUBSTITUTION**Mardi 25 janvier 2022****Durée : 2 heures (14h00 -16h00)**

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Une feuille A4 recto-verso est autorisée. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

CONTENU DU CONTRÔLE : Exercice 1, Exercice 2, Exercice 3, Exercice 4
ATTENTION : Il y a 4 exercices à faire !**NOM :****PRENOM :****GROUPE DE TD :****Exercice 1 (6 points)**

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les valeurs propres de A . (1 pt)
2. Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A . (1 pt)
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. (2 pts)
4. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence par :

$$a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = 4a_n + 3b_n, \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

Montrer que

$$a_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2 \cdot 5^n), \quad b_n = \frac{1}{3}((-1)^{n+1} + 4 \cdot 5^n), \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(2 pts)

Réponse:

$$\textcircled{1} P_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 4 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x) - 8 = 3 - 4x + x^2 - 8 = x^2 - 4x - 5$$

$$\Delta = 16 - 4 \times (-5) = 36, \sqrt{\Delta} = 6, x_1 = \frac{4-6}{2} = -1, x_2 = 5.$$

Donc A admet deux valeurs propres distinctes -1 et 5 .

Réponse:

② Soit $\vec{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\vec{u} \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow (A + \text{Id}) \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\vec{u} = (x, -x) = x(1, -1). \text{ D'où } E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{u} \in E_5(A) \Leftrightarrow (A - 5 \cdot \text{Id}) \vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2x.$$

$$\text{Donc } \vec{u} = (x, 2x) = x(1, 2). \text{ D'où } E_5(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

$\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(A)$.

$\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_5(A)$.

③ On a $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculs P^{-1} : $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3.$$

$$\text{D'où } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse:

$$\begin{aligned}\text{Donc } A^n &= P \cdot D^n \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & 5^n \\ (-1)^{n+1} & 2 \cdot 5^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 5^n & (-1)^{n+1} + 5^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 5^n & (-1)^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4) On a

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Par récurrence :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

D'après :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-1)^n + 5^n & (-1)^{n+1} + 5^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 5^n & (-1)^n + 2 \cdot 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3} (2(-1)^n + 5^n + (-1)^{n+1} + 5^n) \\ b_n = \frac{1}{3} (2(-1)^{n+1} + 2 \cdot 5^n + (-1)^n + 2 \cdot 5^n) \end{cases}, n \geq 0$$

Donc

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3} ((-1)^n + 2 \cdot 5^n) \\ b_n = \frac{1}{3} ((-1)^{n+1} + 4 \cdot 5^n) \end{cases}, n \geq 0.$$

Exercice 2 (5 points)

On considère \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire canonique $\langle | \rangle$. Soit $\vec{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ et f l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

1. Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique. (1 pt)
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$. (1 pt)
3. Déterminer une base orthonormée (\vec{v}_1, \vec{v}_2) de $\text{Im}(f)$. (2 pts)
4. Donner un vecteur \vec{v}_3 tel que la famille $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ soit une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . (1 pt)

Réponse:

① On a $f(\vec{e}_1) = f(1, 0, 0) = \vec{u}$, $f(\vec{e}_3) = 0$.
 $f(\vec{e}_2) = f(0, 1, 0) = \vec{v}$

Donc
$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

② On a $f(x, y, z) = x \cdot (1, 1, 1) + y \cdot (1, 0, -1)$
 $= (x, x, x) + (y, 0, -y) = (x+y, x, x-y)$
 D'où $\vec{w} = (x, y, z) \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0.$

Donc $\text{Ker}(f) = \{ (0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R} \} = \{ z (0, 0, 1) \mid z \in \mathbb{R} \}$
 $= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Donc $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base du noyau.

③ $\text{Im}(f) = \text{Vect} (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3)) = \text{Vect} (\vec{u}, \vec{v}).$

$\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ constitue une base de $\text{Im}(f)$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour l'orthonormaliser.

On pose $\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \vec{f}_2 &= \vec{v} - \langle \vec{v} | \vec{w}_1 \rangle \cdot \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} (1+0+1) \cdot \vec{w}_1 \\ &= \vec{v} \end{aligned}$$

(Donc on voit que $\langle \vec{v} | \vec{w}_1 \rangle = 0$ et donc $\vec{v} \perp \vec{u}$).

Donc on prend $\vec{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$.

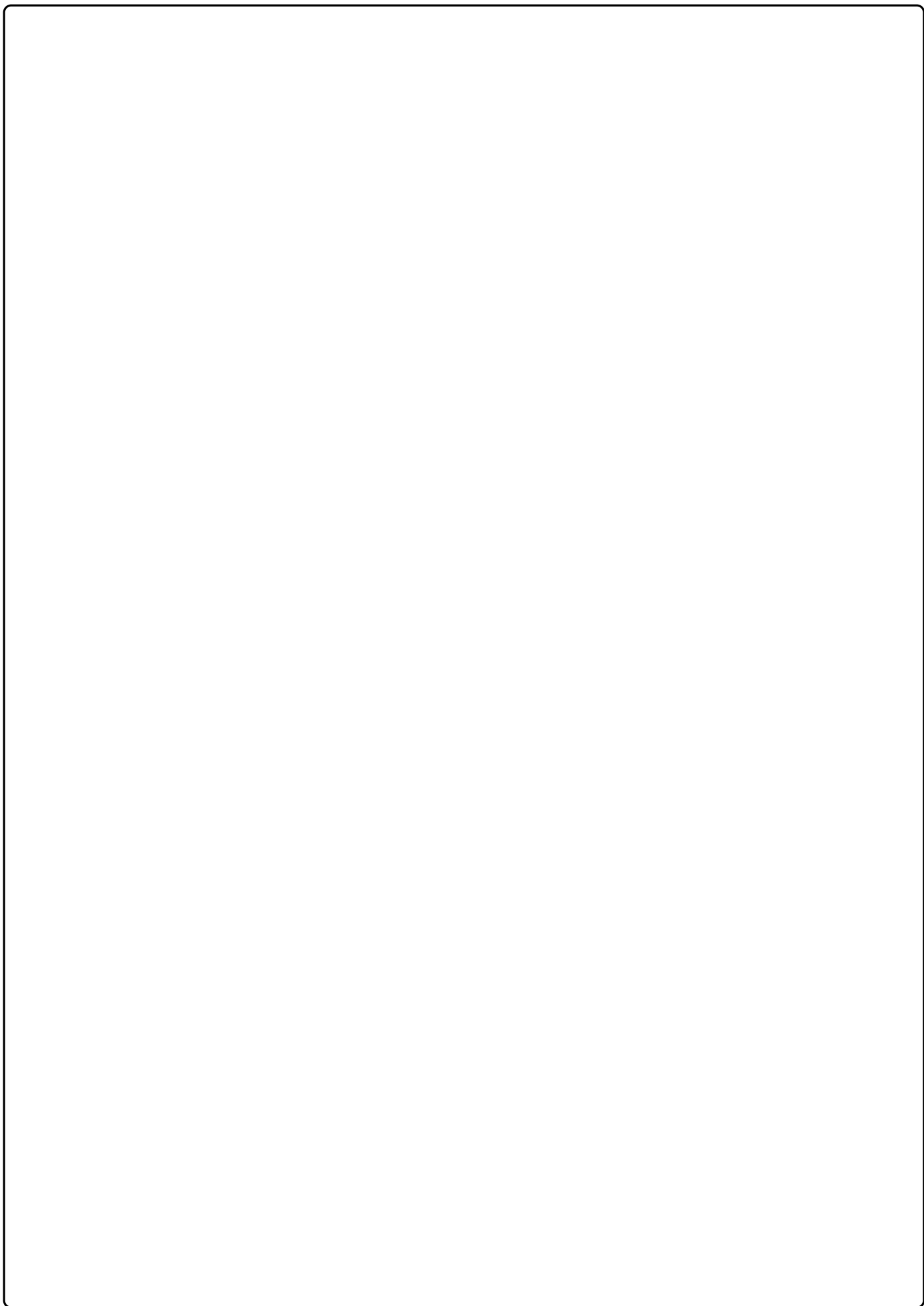
Donc (\vec{w}_1, \vec{w}_2) est une base orthonormée de $\text{Im}(f)$.

④ On prend $\vec{f}_3 = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a $\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &\perp \vec{w}_1 \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &\perp \vec{w}_2 \end{aligned}$

On prend $\vec{w}_3 = \frac{1}{\|\vec{f}_3\|} \cdot \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Abs $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ est une famille orthonormée.
C'est une famille libre (car orthogonale) constituée
de 3 vecteurs, donc c'est une base de \mathbb{R}^3 .



Exercice 3 (4 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $u_n \sim_{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$; $n \geq 1$. (2 pts)
2. La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est-elle absolument convergente ? Est-elle convergente ? Est-elle semi-convergente ? (2 pts)

Réponse: _____

① On a $\cos(n) \sim_0 1$

et donc $\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) \sim_{+\infty} 1, \quad n \geq 1$

D'où $\frac{\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right)}{\sqrt{n}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1.$

② Pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \in]0, \pi/2]$ et donc $\cos\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right) > 0$.

Donc $|u_n| = u_n$.

On a $|u_n| \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série

de Riemann divergente par le critère de

comparaison $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ est divergente, en particulier $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est divergente.

La série n'est pas semi-convergente.

Exercice 4 (7 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad xy' - y = f(x)$$

où $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

On suppose que (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$.

1. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 des applications

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{3-x}, \quad h : x \mapsto h(x) = \frac{1}{3+x}.$$

(1 pt)

2. Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 des applications

$$x \mapsto \ln(3-x), \quad x \mapsto \ln(3+x).$$

(2 pts)

3. Montrer que le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application

$x \mapsto f(x) = \ln(9 - x^2)$ est donné par

$$f(x) = \ln(9) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{n9^n} \right) x^{2n}.$$

(1 pt)

4. Montrer que a_n est donnée par la formule

$$a_0 = -\ln(9), a_1 \in \mathbb{R}, a_{2p+1} = 0, a_{2p} = \frac{-1}{(2p-1)p9^p} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

(2 pts)

5. Calculer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)n9^n} x^n$$

en déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(1 pt)

Réponse:

① $g(x) = \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{x}{3})} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$

pour tout x tq $|\frac{x}{3}| < 1$ et donc $|x| < 3$.

De même: $h(x) = \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1+\frac{x}{3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1-(-\frac{x}{3})} \right)$

$= \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-x}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} \cdot x^n$

Réponse:

$$\text{On conclue: } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot x^n \quad \text{pour } |x| < 3.$$
$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \cdot x^n$$

② par integration

$$\int_0^t \frac{1}{3-x} dx = \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \int_0^t x^n dx$$

Et donc:

$$\left[-\ln(3-x) \right]_0^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Dériv:

$$\ln(3-t) = \ln(3) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$
$$= \ln(3) - \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{3^m} \cdot \frac{t^m}{m}$$

De même:

$$\int_0^t \frac{1}{3+x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

Dériv:

$$\ln(3+t) = \ln(3) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{3^m} \cdot \frac{t^m}{m}$$

③ On a

$$f(x) = \ln(3-x) + \ln(3+x)$$
$$= \ln(3) + \ln(3) + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{m-1}}{3^m \cdot m} - \frac{1}{3^m \cdot m} \right) t^m$$
$$= \ln(3) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m-1} - 1}{3^m \cdot m} \cdot t^m$$

Réponse:

$$\text{Si } m = 2p, \text{ alors } \frac{(-1)^{m-1} - 1}{3^m \cdot m} = \frac{-2}{g^p \cdot 2p} = \frac{-1}{g^p p}$$

$$\text{Si } m = 2p+1, \text{ alors } \frac{(-1)^{m-1} - 1}{3^m \cdot m} = \frac{(-1)^{2p} - 1}{3^m \cdot m} = 0.$$

$$\underline{\text{D'où}} \quad f(x) = \ln(g) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{g^p p} \right) x^{2p}.$$

$$\textcircled{4} \quad \text{On a } y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}. \quad \text{On}$$

$$\begin{aligned} \text{remplace dans (E): } x y'(x) - y(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1) a_n x^n = \ln(g) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{-1}{g^p p} \right) x^{2p}. \end{aligned}$$

$$\underline{\text{Par identification:}} \quad a_0 = \ln(g), \quad 0, a_1 = 0 \quad (\text{car } a_1 \in \mathbb{R})$$

$$a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad (2p-1) a_{2p} = \frac{-1}{g^p \cdot p}, \quad p \geq 1$$

$$\underline{\text{D'où}} \quad a_{2p} = \frac{-1}{(2p-1) g^p p} \quad \text{pour } p \geq 1.$$

$\textcircled{5}$ Par le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{(2(n+1)-1)(n+1) \cdot g^{n+1}} \cdot \frac{(2n-1)n g^n}{1} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{g} \right) = \frac{1}{g}.$$

Donc le rayon de convergence de la série donnée est 3.

Pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on a $|x^2| < g$

ssi $|x| < 3$ et donc le rayon de convergence est $R = 3$.