

CONTRÔLE CONTINU FINAL**Mercredi 06 janvier 2021****Durée : 2 heures**

Les calculatrices et les téléphones portables ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La clarté de la rédaction constituera un élément important dans l'appréciation des copies. Le barème est à titre indicatif.

Une feuille A4 manuscrite est autorisée.

NOM :**PRENOM :****GROUPE DE TD :****Exercice 1 - (8 points)**

On munit \mathbb{R}^3 du produit scalaire canonique. Soit \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 et soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f(x, y, z) = (2x + z, 3y, x + 2z).$$

1. Montrer que la matrice A de f dans la base canonique \mathcal{C} est (1pt)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier pourquoi A est diagonalisable dans une base orthonormée. (1pt)

3. Calculer les valeurs propres de A . (2pts)

4. Déterminer une base orthonormée de chaque sous-espace propre de A . (3pts)

5. Expliciter une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , formée de vecteurs propres de f , par rapport à laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D , ainsi qu'une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^{-1}$. (1pt)

Réponse :

① $f(\vec{e}_1) = (2, 0, 1), f(\vec{e}_2) = (0, 3, 0), f(\vec{e}_3) = (1, 0, 2).$

Donc $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

② Comme A est symétrique, A est diagonalisable dans une base orthonormée.

③ $P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix}$

$$P_A(x) = (3-x) (2-x)^2 - 1 = (3-x) (2-x-1)(2-x+1) \\ = (3-x) (1-x)(3-x) = (3-x)^2 (1-x).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ de multiplicité 1 et $\lambda_2 = 3$ de multiplicité 2.

$$\textcircled{4} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \quad \underline{\text{ssi}} \quad (A - \text{Id}) \vec{u} = \vec{0} \\ \underline{\text{ssi}} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \\ \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases}$$

Donc $\vec{u} = (x, y, z) = (-z, 0, z) = z(-1, 0, 1).$

Donc $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$ On prend

$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}_1)$ constitue une base orthonormée de $E_1(A).$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A) \quad \underline{\text{ssi}} \quad (A - 3\text{Id}) \vec{u} = \vec{0} \\ \underline{\text{ssi}} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{ssi}} \quad -x+z=0 \quad \underline{\text{ssi}} \quad x=z$$

Donc : $\vec{u} = (x, y, z) = (x, y, x) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0).$

D'après : $E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

En posant $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on voit que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ et donc $\vec{u} \perp \vec{v}$. On prend

$$\vec{u}_2 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \vec{v}.$$

Donc (\vec{u}_2, \vec{u}_3) est une base orthonormée de $E_3(A)$.

(5) On prend $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, qui est une base orthonormée formée de vecteurs propres de f . On a alors

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - (4 points)

On souhaite déterminer le développement en série entière de l'application

$$f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x^2)$$

au point $x_0 = 0$.

1. Vérifier que $f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$. (1pt)
2. Déterminer le développement en série entière sur \mathbb{R} en 0 de f' . (2pts)
3. En déduire le développement en série entière sur \mathbb{R} en 0 de f . (1pt)

Réponse :

$$\textcircled{1} \quad f'(x) = \arctan'(x^2) \times (x^2)' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \times 2x \\ = \frac{2x}{1+x^4}.$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2x}{1+x^4} = 2x \cdot \frac{1}{1-(-x^4)} \quad \text{Or} \quad \frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$$

pour $r \in]-1, 1[$. Comme $x \in]-1, 1[$,

on a $-x^4 \in]-1, 1[$ et donc

$$\frac{1}{1-(-x^4)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^4)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n}.$$

$$\text{D'où} \quad f'(x) = 2x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n x^{4n+1}.$$

$\textcircled{3}$ Pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$\int_0^t f'(x) dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n x^{4n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \int_0^t x^{4n+1} \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{1}{4n+2} \cdot t^{4n+2}$$

$$\text{D'où} \quad f(t) - f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{4n+2} t^{4n+2}$$

Or $f(0) = 0$ et donc

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{4n+2} t^{4n+2}$$

est le développement recherché.

Exercice 3 - (12 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x^2 - \pi^2$ sur $[-\pi, \pi]$.

1. Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$. (1pt)
2. Montrer que f est paire. (1pt)
3. Montrer que le coefficient a_n de la série de Fourier de f est donné par :

$$a_0 = \frac{-4\pi^2}{3}, a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

(4 pts)

[Indication : pour calculer l'intégrale $\int_0^\pi (x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx$, on pourra intégrer par parties deux fois de suite.]

4. Écrire la série de Fourier de f dont la somme sera notée Sf . (0.5 pt)
5. Pour quelles valeurs de x a-t-on $Sf(x) = f(x)$? (1,5 pts)
6. Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

(2 pts)

[Indication : utiliser le théorème de Dirichlet pour une valeur de x bien choisie entre 0 et π .]

7. En utilisant l'identité de Parseval, où a_n et b_n sont les coefficients de Fourier de la fonction f ,

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

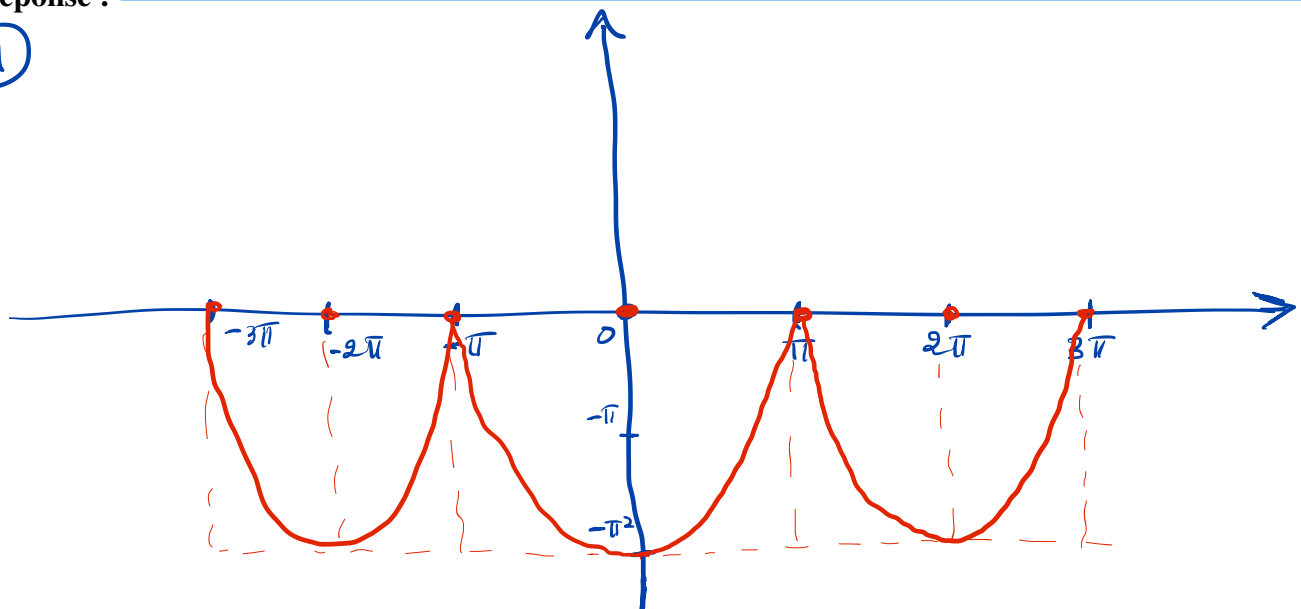
calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

(2 pts)

Réponse :

1



② $f(-x) = (-x)^2 - \pi^2 = x^2 - \pi^2 = f(x)$ pour tout $x \in [-\pi, \pi]$. Comme f est 2π -périodique, $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc f est paire.

③ Comme f est paire, $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} - \pi^2 x \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi^3}{3} - \pi^2 \cdot \pi \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \times \frac{-2\pi^3}{3} = \frac{-4}{3} \cdot \pi^2. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx$$

On utilise une IPP:

$$\begin{aligned} U &= x^2 - \pi^2 & U' &= 2x \\ V' &= \cos(nx) & V &= \frac{\sin(nx)}{n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2) \cos(nx) dx &= \left[(x^2 - \pi^2) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= \frac{-2}{n} \cdot \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \end{aligned}$$

On utilise de nouveau une IPP:

$$\begin{aligned} U &= x & U' &= 1 \\ V' &= \sin(nx) & V &= \frac{-\cos(nx)}{n}. \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} x \sin(nx) dx = \left[\frac{-x \cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} dx$$

$$= \frac{-\pi}{n^2} \cos(n\pi) + \left[\frac{\sin(nx)}{n^2} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{-\pi}{n^2} (-1)^n.$$

D'_n $a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{-2}{n^2} \times \frac{-\pi}{n^2} (-1)^n$

$$= \frac{4}{n^2} (-1)^n, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(4) La série de Fourier de f est :

$$\frac{-2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

(5) Comme f est continue, d'après le théorème de Dirichlet

$$f(x) = Sf(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(6) Pour $x=0$, on a :

$$f(0) = Sf(0) = \frac{-2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(0)$$

Donc

$$-\pi^2 = \frac{-2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \left(-\pi^2 + \frac{2\pi^2}{3} \right) \\ = \frac{1}{4} \left(-\frac{\pi^2}{3} \right) = -\frac{\pi^2}{12}.$$

(7) L'identité de Parseval donne :

$$\left(\frac{-4\pi^2}{3} \right)^2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx \\ D'où \quad \frac{4\pi^4}{9} + 8 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 dx \\ \int_0^{\pi} f(x)^2 dx = \int_0^{\pi} (x^2 - \pi^2)^2 dx = \int_0^{\pi} (x^4 - 2\pi^2 x^2 + \pi^4) dx \\ = \left[\frac{x^5}{5} - 2\pi^2 \frac{x^3}{3} + \pi^4 x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{3} + \pi^5 \\ = \frac{3\pi^5 - 4\pi^5}{3} + \pi^5 \\ = \frac{8}{15} \pi^5.$$

D'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{8} \left(\frac{8}{15} \pi^5 - \frac{4\pi^4}{9} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{12}{135} \pi^4 \\ = \frac{\pi^4}{90}.$$