

C1 04/12/24 CORRECTION

COURS Une telle matrice est diag. avec matrice de passage orthogonale.

EXO 1 [1] Méthode 1: déf. famille libre

Méthode 2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det \neq 0$ donc $rg \geq 3$ donc $rg = 3$
 $\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w}$

[2] $\left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

EXO 2 [1] J ~~est~~ symétrique

[2] $\det(J - X I) = -X^2(X-3) \Rightarrow$ v.p. 0 (double) et 3 (simple)

[3] ~~Par ex.~~ $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

EXO 3 [1] $\det(A - X I) = (X-2)(X-3) \Rightarrow$ que des v.p. simples et X scindé.

[2] $A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

[3] $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 3 \cdot 2^n \\ 0 & -2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 3 \cdot (3-2^n) \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

EXO 4 Le terme général équivaut à $\frac{1}{n^{1/2}}$

On a $1/2 \leq 1$ donc ~~est~~ (comparaison Riemann)
la série diverge.

CC1 04/12/24 BARÈME

COURS 2 pt 1 pt pour diagonalisable
1 pt pour mot-clé ~~orthonormé~~ / orthogonal

EXO 1 **1** 2 pt quelle que soit la méthode (combinaisons linéaires, matrice extraite...)
1 pt si raisonnement raisonnable mais erreur de calcul

2 3 pt 2 pt si oubli de normaliser
2 pt si méthode comprise et petite erreur
1 pt si méthode comprise et beaucoup d'erreurs.

EXO 2 **1** 1 pt Noter sec

2 1 pt Noter sec

3 3 pt 0,5 pt pour matrice diagonale
2,5 pt pour matrice P . Noter gentil si petit oubli/erreur.
1 pt si méthode comprise mais rien ne marche (par erreur en amont)

EXO 3 **1** 1 pt. Noter sec

2 2 pt. 0,5 pt pour matrice diagonale
1,5 pt pour P .

3 2 pt. 1 pt pour $P D^n P^{-1}$
1 pt pour résultat

EXO 4 3 pt Noter sec (mais pas grave si mot "Riemann" oublié)