

Correction Feuille 4 : Limites et continuité des fonctions

Exercice 1. Soit $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \sin(x/4) & \text{si } x > 0. \end{cases}$

1. Dessiner le graphe de f .

2. Calculer les limites suivantes :

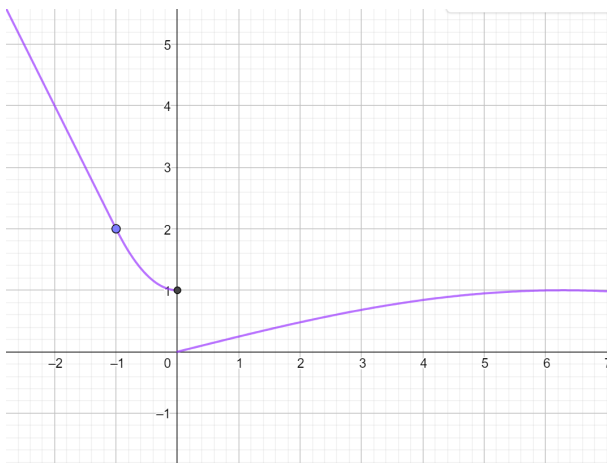
- | | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$ |

Est-ce que les limites suivantes existent ? Si oui, donner leur valeur.

- | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|

Correction

La fonction f est affine sur $] -\infty, -1]$, parabolique entre -1 et 0 , avec une tangente horizontale en 0^- et c'est une sinusoïde (dilatée) sur $\mathbb{R}^+$.



Par définition de f , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1) = 2. \end{aligned}$$

De façon analogue, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x/4) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2 \\ \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sin(x/4) = \sqrt{2}/2. \end{aligned}$$

On en déduit que les limites (a) et (c) existent, et elles valent respectivement 2 et $\sqrt{2}/2$, tandis que la limite (b) n'existe pas.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 1} x - 1 $ | 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{ x - 1 }$ | 14. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + 5}{x - 4}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{ x - 1 }$ | 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^9 - 17}{x^7}$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} - 1}$ | 16. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} x^x$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2} \right)$ | 17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \sqrt{x}}$ |
| 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x$ | 18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}$ |

Correction

1. On a $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4.$$

2. Décomposer $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ et $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ et simplifier. On obtient que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$
3. Lorsque x tend vers 4, $2x + 5$ tend vers 13 et $x - 4$ tend vers 0, donc le quotient diverge. De plus, on peut étudier les limites à gauche et à droite :

$$\frac{2x + 5}{x - 4} \xrightarrow{x \rightarrow 4, x < 4} -\infty \text{ et } \frac{2x + 5}{x - 4} \xrightarrow{x \rightarrow 4, x > 4} +\infty$$

4. On a pour tout x non nul, $\frac{3x^9 - 17}{x^7} = 3x^2 - 17x^{-7}$.

x^{-7} est borné sur $[1, +\infty[$ et $3x^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\frac{3x^9 - 17}{x^7}$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

5. On factorise par les puissances les plus élevées au numérateur et au dénominateur : pour tout x assez grand, $8 + 2x - 5x^3$ est non nul et on a

$$\frac{3x^3 - 5x^2 + 7}{8 + 2x - 5x^3} = \frac{x^3 \times (3 - 5x^{-1} + 7x^{-3})}{x^3 \times (8x^{-3} + 2x^{-2} - 5)} = \frac{3 - 5x^{-1} + 7x^{-3}}{x^{-3} + 2x^{-2} - 5} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{5}.$$

6. On factorise à nouveau numérateur et dénominateur par leur plus grande puissance. La limite vaut 0.

7. Lorsque x tend vers 1, $x - 1$ tend vers 0, donc $|x - 1|$ tend vers 0.

8. On déduit de la question précédente que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{|x - 1|} = +\infty$.

9. Lorsque x tend vers 5, $x - 1$ tend vers 4, donc $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{|x - 1|} = 1/4$.

10. En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{1 + x} + 1$, on trouve que

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x} - 1} = \frac{\sqrt{1 + x} + 1}{(\sqrt{1 + x} - 1)(\sqrt{1 + x} + 1)} = \frac{\sqrt{1 + x} + 1}{x}$$

d'où on trouve que la limite n'existe pas ($x \rightarrow 0^+$ et $x \rightarrow 0^-$).

11. On a

$$\frac{1}{1 - x} - \frac{1}{1 - x^2} = \frac{x}{(1 - x)(1 + x)},$$

d'où c'est simple de voir que la limite n'existe pas.

12. On utilise l'expression conjuguée. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 5} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - x) \times (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} \\ &= \frac{2x + 5}{\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x} \\ &= \frac{x(2 + (5/x))}{x \left(\sqrt{1 + (2/x) + (5/x^2)} + 1 \right)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

13. La fonction $\sin$ est bornée donc $\lim_{+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

14. Pour la même raison, $\lim_0 x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

15. Il faut mettre en facteur, au numérateur et au dénominateur, les quantités qui convergent à l'infini plus rapidement que les autres. On trouve donc que : pour tout x non nul,

$$\frac{x^2 + \sin x}{x^2 + \cos x} = \frac{x^2 \times (1 + x^{-2} \cos x)}{x^2 \times (1 + x^{-2} \sin x)} = \frac{1 + x^{-2} \cos x}{1 + x^{-2} \sin x}$$

ce qui converge vers 1 en $+\infty$

16. On écrit, pour tout $x > 0$, $x^x = e^{x \ln x}$. Or $x \ln x$ tend vers 0 en 0^+ , donc x^x tend vers 1 en 0^+ .
17. $1 + 2 \sin x$ est borné sur $\mathbb{R}$ et $1 + \sqrt{x}$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \sin(x)}{1 + \sqrt{x}} = 0$.
18. Pour tout x , $e^{-\sin x}$ est compris entre e^{-1} et e , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x} = +\infty$.

Exercice 3 (Limites et taux d'accroissement).

Rappelons que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}}$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x}$ | 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x)$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \sqrt{x} \ln^3 x$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n}, n \in \mathbb{Z}$ |

Correction

1. On a

$$\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x}} = \frac{\sin(2x)}{2x} 2\sqrt{x} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

2. Du moment que $\sin x/x \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow 0$ et que $x \sin(1/x) \rightarrow 0$, on a que la deuxième limite vaut 0.
3. Par définition de la fonction tan, on a

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cos x \longrightarrow \cos(0) = 1 \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

On peut aussi remarquer que c'est le taux d'accroissement de tan en 0.

4. On change la variable en posant $1 - 2x = y$, et donc $x = (1 - y)/2$. En utilisant que $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$ (faire un dessin pour le prouver), on a

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{1 - 2x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}y)}{\frac{\pi}{2}y} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

5. De façon similaire, on commence par noter que $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$. On pose alors $2x - 1 = y$, d'où $x = (1 + y)/2$. Grâce aux formules $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$, on trouve alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1/2} (2x^2 + x - 1) \tan(\pi x) &= \lim_{y \rightarrow 0} y \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}y \right) \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}y)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2} (3 + y) \frac{\cos(\frac{\pi}{2}y)}{-\sin(\frac{\pi}{2}y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2}y}{\sin(\frac{\pi}{2}y)} \frac{-(3 + y)}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = -\frac{3}{\pi}. \end{aligned}$$

6. On peut écrire

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos^2 x - 1}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{-1}{1 + \cos x} \longrightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{quand } x \rightarrow 0.$$

Ou alors : Posons $y = x/2$

$$\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{\cos(2y) - 1}{4y^2} = \frac{2\sin^2 y}{4y^2} \xrightarrow{0} \frac{1}{2}$$

7. Quand $x \rightarrow 0$, on a

$$\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} \longrightarrow 1.$$

8. La limite vaut 0 par croissances comparées.

9. On a $x^n = \exp(n \ln x)$, d'où on trouve

$$\frac{\exp(\ln^2 x)}{x^n} = \exp(\ln x(\ln x - n)).$$

On en déduit que la limite vaut $+\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4 (Partie entière).

Dans cet exercice, la notation $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x . Calculer :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} E(x+1)$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE\left(\frac{1}{x}\right)$

Correction

1. Soit $x \in]0, 1[$. On a $E(x+1) = 1$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} E(x+1) = 1$.

Soit maintenant $x \in]-1, 0[$. On a $E(x+1) = 0$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} E(x+1) = 0$.

On peut donc conclure que la fonction $x \mapsto E(x+1)$ n'admet pas de limite en 0.

2. Soit x un réel non nul. On a

$$\frac{1}{x} - 1 \leq E(1/x) \leq \frac{1}{x}.$$

On multiplie cette double inégalité par x .

Si x est positif, on obtient :

$$1 - x = x \times \left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq xE(1/x) \leq x \times \frac{1}{x} = 1.$$

De même, si x est négatif, on obtient :

$$1 - x = x \times \left(\frac{1}{x} - 1\right) \geq xE(1/x) \geq x \times \frac{1}{x} = 1.$$

Par encadrement, on en déduit que $xE(1/x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers 0.

3. Pour tout $x > 1$, $E(1/x) = 0$, donc $xE(1/x) = 0$.

On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} xE(1/x) = 0$.

Exercice 5. 1. Si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 5$, trouver $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2. Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = -2$, trouver $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Correction

La première limite vaut 5, la deuxième vaut 0. Pour le voir, on peut :

- soit raisonner par l'absurde : si le numérateur ne tend pas à 0, la limite ne peut pas être finie (car le dénominateur tend à 0) ;
- soit utiliser la définition de limite.
- Ou encore : écrire que, pour tout $x \neq 2$, on a

$$f(x) = (x - 2) \times \frac{f(x) - 5}{x - 2} + 5$$

, et de façon similaire, pour tout x non nul, on a

$$\frac{f(x)}{x} = x \frac{f(x)}{x^2}$$

.

Exercice 6 (Continuité à droite et à gauche).

Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité des fonctions suivantes en chaque point de leur domaine de définition.

1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

Correction

1. Pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = x^2$ coïncide avec une fonction continue, donc elle est continue en tout point de $[0, 1[$; le même argument s'applique à tout point dans $]1, 2]$.

En $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1, x < 1} x^2 = 1 = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f(x) \quad \text{et} \quad f(1) = 1,$$

donc f est continue aussi en 1.

2. Le même argument de l'exercice précédent montre que f est continue en tout point $x \neq 0$. Considérons maintenant le cas $x = 0$. On rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1.$$

On en déduit que f n'est pas continue en 0, mais continue à droite.

Exercice 7. 1. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ pour lesquelles f_k définie par $f_k(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ k - x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ est une fonction continue.

2. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{1 + x^3}{1 + x}$. Trouver une application continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g|_{\mathbb{R} \setminus \{-1\}} = f$

Correction

1. Pour $x \neq 2$, la fonction est clairement continue, il faut donc juste choisir le k de manière que les deux termes coïncident à $x = 2$, c'est-à-dire $2^2 = k - 2^2$ ou bien $k = 8$. La seule valeur k telle que f_k est une fonction continue vaut donc 8.
2. Comme $1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$, la fonction $g(x) = x^2 - x + 1$ est continue et coïncide avec f pour $x \neq -1$.

Exercice 8. Montrer que l'équation $x^3 - 15x + 1 = 0$ a trois solutions dans l'intervalle $[-4, 4]$.

Correction On calcule les valeurs de polynômes sur les bords de l'intervalle et pour des arguments simples : Pour $x = -4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = -3 < 0$.

Pour $x = 0$, on obtient $1 > 0$.

Pour $x = 1$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 1 - 15 + 1 < 0$.

Pour $x = 4$, on obtient $x^3 - 15x + 1 = 16x - 15x + 1 = x + 1 = 5 > 0$

Par la continuité de polynôme et le théorème des valeurs intermédiaires, il y a donc (au moins) une solution dans $] -4, 0[$, une solution dans $]0, 1[$ et une solution dans $]1, 4[$.

On peut également justifier que P admet exactement 3 racines dans $[-4, 4]$: en effet, P est dérivable et $P'(x) = 3x^2 - 15 = 3(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$.

On peut alors dresser le tableau de variation de P :

x	-4	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{5}$	4	
$\text{sgn}(P'(x))$	$+$	0	$-$	0	$+$
P	-3	$10\sqrt{5} + 1$	$-10\sqrt{5} + 1$	5	

P est donc continue et strictement monotone sur chacun des intervalles $[-4, -\sqrt{5}]$, $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$ et $[\sqrt{5}, 4]$, avec $P(-4) < 0$, $P(-\sqrt{5}) > 0$, $P(\sqrt{5}) < 0$ et $P(4) > 0$. Par le théorème de la bijection, elle s'annule donc une unique fois sur chacun de ces trois intervalles.

Exercice 9. Montrer qu'il existe $x \in [3\pi/4, \pi]$ tel que

$$\tan x + \frac{x}{3} = 0.$$

Correction On évalue l'expression à $x = 3\pi/4$ et à $x = \pi$ et on trouve $-1/4 < 0$ et $\pi/3 > 0$. Par la continuité de la fonction tangente et le théorème de valeurs intermédiaires, l'expression a donc un zéro dans l'intervalle donné.

Exercice 10 (Bijection et monotonie).

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f_n(x) = x^n - x - 1$$

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et converge vers une limite ℓ .
4. Déterminer ℓ .

Correction

1. On a $f_n(1) = -1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ (parce que le terme dominant est positif). Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc bien $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 \geq 2 - 1 = 1 > 0$, la fonction est strictement croissante. Donc, x_n est unique.
2. Par définition de x_n , on a $x_n^n = x_n + 1$. On obtient

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n - 1 = x_n(x_n + 1) - x_n - 1 = x_n^2 - 1 > 0.$$

3. Comme $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ et $f_{n+1}(x_n) > 0$ par le résultat précédent, on a bien $1 < x_{n+1} < x_n$ et la suite est décroissante. Comme la suite est minorée par 1, elle converge vers une limite ℓ .
4. Comme $x_n > 1$, on sait que $\ell \geq 1$. Si la limite $\ell > 1$, on obtient la minoration divergente

$$\ell + 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ell^n = \infty.$$

On conclut que $\ell = 1$.

Exercice 11 (Une fonction lipschitzienne).

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ vers $[a, b]$.

1. On suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que f est continue. En déduire qu'il existe au moins un réel $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$. On pourra utiliser la fonction g de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$.

2. On suppose maintenant que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

Montrer qu'il existe un unique $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Correction

1. Continuité de f (2 méthodes)

- En utilisant la définition de la continuité par les suites : Soit $x_0 \in [a, b]$ et (u_n) une suite de réels de $[a, b]$ qui converge vers x_0 .

Pour tout $n \geq 0$, on a

$$|f(u_n) - f(x_0)| \leq |u_n - x_0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc f est continue en x_0 . Par définition, f est donc continue sur $[a, b]$

- • Avec des ε . Soit $x_0 \in [a, b]$ et soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $x \in [a, b]$ tel que $|x - x_0| \leq \varepsilon$, on a :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \leq \varepsilon$$

Donc $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, et f est continue en x_0 (et donc aussi sur $[a, b]$).

On utilise maintenant le fait que $f([a, b])$ est inclus dans $[a, b]$. La fonction $\phi : u \mapsto f(u) - u$ est continue et elle vérifie :

$$f(a) - a \geq a - a = 0$$

$$f(b) - b \leq b - b = 0$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, ϕ s'annule sur $[a, b]$: il existe $u \in (a, b)$ tel que $\phi(u) = 0$, ce qui se traduit par $f(u) = u$.

2. Si on suppose que pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ avec $x \neq y$ on a

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

on a toujours pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ Donc il existe (au moins) un réel u dans $[a, b]$ tel que $f(u) = u$.

Considérons deux réels u et v de $[a, b]$ tels que $f(u) = u$ et $f(v) = v$.

On a $f(u) - f(v) = u - v$.

Or, si $u \neq v$, $|f(u) - f(v)|$ est strictement inférieur à $|u - v|$.

On a donc nécessairement $u = v$.

L'équation $f(u) = u$ admet donc une unique solution sur $[a, b]$.

Exercice 12. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors f est surjective.

Correction Soit $y \in \mathbb{R}$. Par la limite vers $-\infty$, il existe forcément une valeur $a \in \mathbb{R}$ telle que $a < 0$ et $f(a) < y$. Par la limite vers $+\infty$, il existe forcément une valeur $b \in \mathbb{R}$ telle que $b > 0$ et $f(b) > y$.

Par la continuité de f et le théorème de valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y$. Comme y était un réel arbitraire, la fonction f est bien surjective.

Exercice 13. Vrai ou faux ?

1. Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé borné.
2. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert borné.
3. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle ouvert, mais pas forcément borné.
4. Si f est continue sur un intervalle ouvert borné $]a, b[$ vers $\mathbb{R}$, alors $f(]a, b[)$ est un intervalle, mais pas forcément ouvert ni borné.

Correction

1. Vrai. La fonction admet un minimum et un maximum et par le théorème des valeurs intermédiaires atteint aussi tout l'intervalle $[\min, \max]$.
2. Faux. Contre-exemples : f la fonction constante qui ne donne pas un intervalle ouvert. $f(x) = 1/x$ sur $]0, 1[$ qui n'est pas bornée.
3. Faux. Contre-exemple : fonction constante, ou la fonction sin sur $] - 2\pi, 2\pi[$.
4. Vrai. La fonction atteint toutes les valeurs entre $\inf\{f(x)\}$ et $\sup\{f(x)\}$ par le théorème des valeurs intermédiaires ce qui donne toujours un intervalle qui pourrait avoir des bornes $\pm\infty$ ou inclure ses bornes si la fonction admet un minimum ou maximum.

Exercice 14 (Fonction périodique).

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique. Montrer que f est bornée.
2. En utilisant le résultat précédent, calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(\sin^8 x + \cos^{14} x)}.$$

Correction

1. Considérons une fonction f de période T .
 Sur l'intervalle fermé et borné $[0, T]$, la fonction f est continue, donc elle est bornée. Notons $M = \sup[0, T]|f(x)|$.
 Soit t un réel quelconque. Il existe un réel t_0 de $[0, T]$ tel que $t - t_0$ soit un multiple de T .
 Puisque f est de période T , on a $f(t) = f(t_0)$.
 Or t_0 appartient à $[0, T]$, donc $f(t_0)$ est borné par M .
 On peut donc conclure que, pour tout réel t , on a $|f(t)| \leq M$.
2. Par les théorèmes de croissance comparée, on sait que la limite en $+\infty$ de $(\ln x)/x$ est nulle.
 Étudions maintenant la fonction $\phi : x \mapsto \sin^8 x + \cos^{14} x$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et elle est périodique de période π .
 On vérifie qu'elle ne s'annule pas : soit $x \in [0, \pi]$ tel que $\phi(x) = 0$. Alors $\sin x = 0$ et $\cos x = 0$, ce qui est impossible.
 Sur $[0, \pi]$, la fonction ϕ admet donc un minimum strictement positif. Par périodicité, c'est également son minimum sur $\mathbb{R}$.
 Donc $\frac{1}{\phi}$ est positive et majorée sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de conclure que $\frac{1}{x\phi(x)} \ln x$ tend vers 0 en $+\infty$.

Études complètes de fonctions**Exercice 15** (Fraction rationnelle).

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$$

1. Étudier les variations de f .

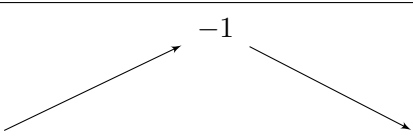
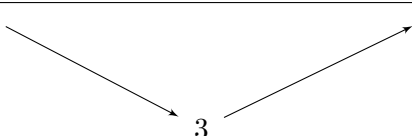
- Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
- Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression $f(x) - (x + 2)$.
En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f .
- Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
- Tracer le graphe de f .

Correction

- f est continue et dérivable sur $] -\infty, -1[$ et sur $] -1, +\infty[$. Pour tout réel $x \neq -1$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1) \times (2x+3) - 1 \times (x^2+3x+3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+3x+2x+3-x^2-3x-3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $x(x+2)$, ce qui nous permet de dresser le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$\text{sgn}(f'(x))$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f						

- En utilisant les propriétés classiques sur les limites, on détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que les limites à droite et à gauche en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

Cela permet de compléter le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$\text{sgn}(f'(x))$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	-1		$+\infty$	$+\infty$	
		$-\infty$	$-\infty$	3		

- Soit x un réel différent de -1 .

On a

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 2) &= \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} - (x + 2) \\ &= \frac{x^2 + 3x + 3 - (x + 2)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 3 - (x^2 + 3x + 2)}{x + 1} \\ &= \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{+\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{+\infty} f(x) - (x + 2) = 0.$$

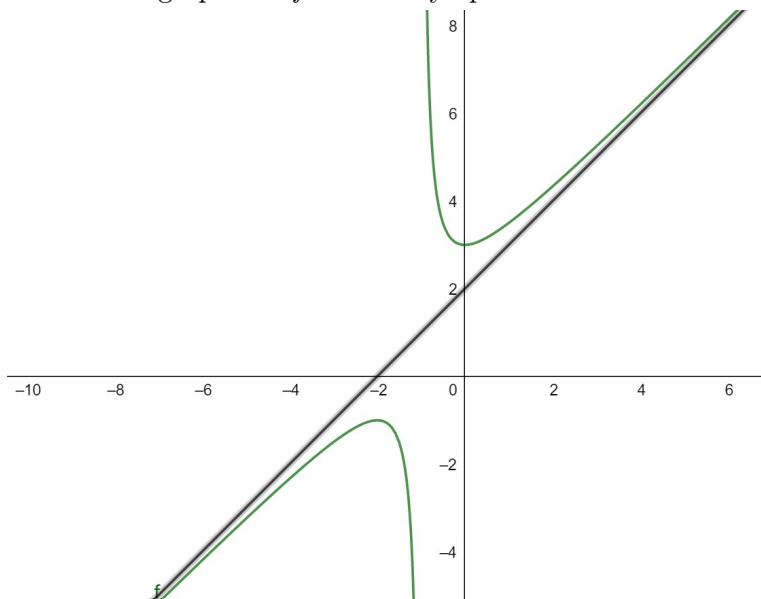
C'est la définition des asymptotes : la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = x + 2$.

4. Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à son asymptote, il faut déterminer le signe de $f(x) - x - 2$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$x + 1$ est positif lorsque x tend vers $+\infty$, donc la courbe représentative de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

$x + 1$ est négatif lorsque x tend vers $-\infty$, donc la courbe représentative de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

5. On trace le graphe de f et son asymptote.



Exercice 16 (Avec un logarithme).

On note f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $[0, 1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0, 1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Correction

On note f la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{x}$.

1. On calcule la dérivée de f : soit $x \in]0, 1[$. On a :

$$f'(x) = -\ln(1 - x) + (1 - x) \times \frac{-1}{1 - x} + 1 = -\ln(1 - x)$$

Donc f' est strictement positive sur $]0, 1[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

On remarque que $f(0)$ est égal à 0, donc f est positive sur $[0, 1[$.

2. La fonction g est continue et dérivable sur $]0, 1[$, et pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{-x}{1 - x} - \ln(1 - x) \right) = \frac{-x - (1 - x) \ln(1 - x)}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}.$$

D'après la question 1, on peut affirmer que, pour tout x de $]0, 1[$, $g'(x)$ est négative, donc g est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

3. Soit $x \in]0, 1[$. On a

$$g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\ln(1-x) - \ln(1)}{(1-x) - 1}.$$

$g(x)$ représente donc l'opposé du taux d'accroissement de la fonction $\ln$ entre $1-x$ et 1 , donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\ln'(1) = -1$.

Pour la limite en 1 , on utilise que $\lim_0 \frac{\ln t}{t} = -\infty$, donc $\lim_1 g(x) = -\infty$.

Exercice 17 (Avec une exponentielle).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f .
3. Tracer sommairement la courbe représentative de f .

Correction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

1. En l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances, donc $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.
2. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule sa dérivée : soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - 2 \cdot x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) e^{-x^2} \\ &= (1 - 2x^2 - x) e^{-x^2} \end{aligned}$$

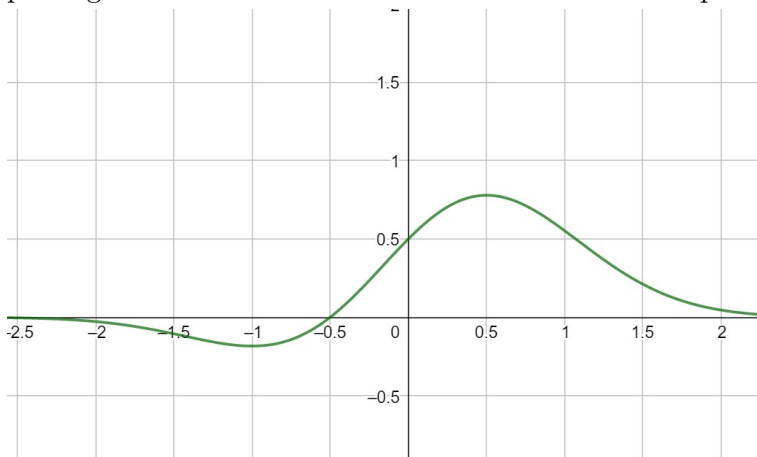
Le discriminant Δ de $-2x^2 - x + 1$ est égal à 9 donc les racines de ce trinôme sont $\frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1+3}{-4} = -1$.

$f'(x)$ est donc positif pour tout x de $[-1, 1/2]$ et négatif sinon.

On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$	
$\text{sgn}(f'(x))$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	0	$-e^{-1/2}$	$e^{-1/4}$	0	

3. Pour tracer le graphe de f , on calcule sa valeur en 0 , et on remarque aussi que f s'annule en $-1/2$. On peut également utiliser les valeurs des dérivées sur ces points.



Exercice 18 (Fonctions trigo).

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
2. Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x .
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Tracer la courbe représentative de f .

Correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1. On peut remarquer que, pour tout x réel, $f(x) = 2\sin x \cdot (1 + \cos x)$.
 f est définie sur $\mathbb{R}$, et 2π est une période de f (et π n'en est pas une).
C'est une fonction impaire car les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont impaires.
On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$.
2. Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$f'(x) = 2\cos x + 2\cos(2x) = 2 \cdot (\cos x + 2\cos^2 x - 1)$$

Le trinôme $2t^2 + t - 1$ admet pour racine -1 et $1/2$. Il est donc positif pour tout t dans $] -\infty, -1] \cup [1/2, +\infty[$ et négatif pour $t \in [-1, 1/2]$.

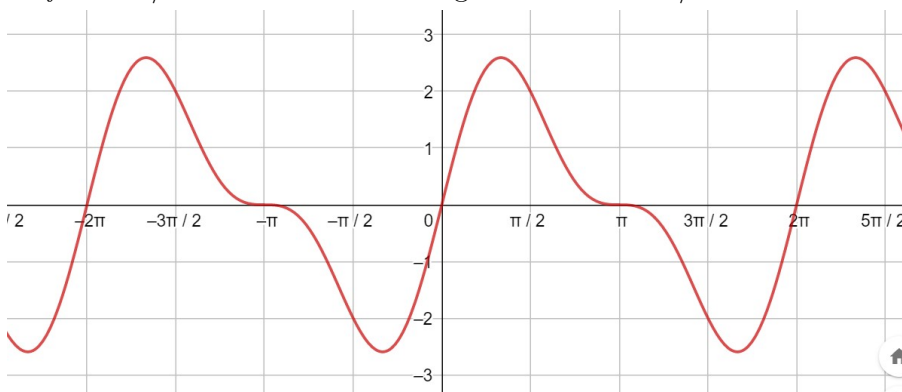
f' est alors négative pour $\cos x$ dans $[-1, 1/2]$, ce qui correspond à $x \in [\pi/3, \pi]$, et f' est positive pour $x \in [0, \pi/3]$.

f est donc croissante sur $[0, \pi/3]$ et décroissante sur $[\pi/3, \pi]$.

3. On dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$		$-\pi/3$		$\pi/3$		π
$\text{sgn}(f'(x))$	0	—	0	+	0	—	0
f	0				$1.5\sqrt{3}$		0
			$-1.5\sqrt{3}$				

4. On trace la courbe représentative de f en utilisant la périodicité. On peut également calculer les valeurs de f en $\pm\pi/2$ et déterminer les tangentes en 0 et $\pm\pi/2$.

**Exercice 19** (Limites et asymptotes).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g , et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0 .
2. En déduire les variations de f .
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4. Déterminer les asymptotes au graphe de f .
5. Tracer ce graphe et ses asymptotes, en veillant à faire figurer les tangentes remarquables.

Correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. La fonction g est, comme f , définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ces fonctions sont toutes deux continues sur leur ensemble de définition.

La fonction g est la somme de deux fonctions strictement croissantes, donc elle est strictement croissante. On détermine ses limites en $0+$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Par le théorème de la bijection, g est une fonction continue et strictement monotone, donc elle est bijective de $]0, +\infty[$ sur son ensemble image $] -\infty, +\infty[$.

Il existe donc un unique réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$.

On remarque que $g(1) = 0$, donc $x_0 = 1$.

2. La fonction f s'écrit comme la somme et le quotient de fonctions dérivables, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

On calcule la dérivée de f : pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x \times \frac{1}{x} + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

La dérivée de f est donc du signe de g . On en déduit que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

3. On calcule les limites de f en $0+$ et en $+\infty$ en utilisant les limites de $(\ln x)/x$ en $0+$ et en $+\infty$:

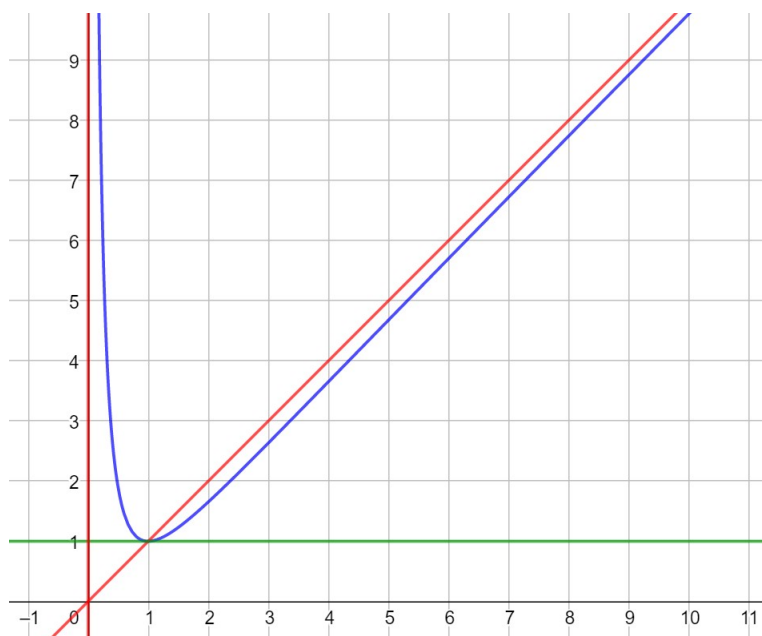
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x} &= -\infty & \text{et} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= +\infty & \text{et} & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

4. En $+\infty$, $(\ln x)/x$ tend vers 0, donc la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$ est nulle : la droite d'équation $y = x$ est l'asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

En $0+$, f tend vers $+\infty$, donc la droite $x = 0$ est l'asymptote à la courbe représentative de f en $0+$.

5. La dérivée de f s'annule en $x = 1$, et $f(1) = 1$, donc la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point $(1, 1)$ (en vert sur le graphique).

On ajoute les deux asymptotes (en rouge).



Exercices supplémentaires

Exercice 20 (Encore des limites).

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x+1)$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln^2 x - \sqrt{x}$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1+} \ln x \ln(\ln x)$
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}$
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x}$

Exercice 21 (Limites et variations).

Soit f une fonction décroissante sur $]0; +\infty[$ telle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a l'inégalité : $f(x) \geq 0$.

Exercice 22 (Sur les fonctions périodiques).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique qui admet une limite en $+\infty$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 23 (Polynômes de degré impair).

Soit n un entier et $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ des réels. On supposera a_n non nul.

1. Si n est impair montrer que l'équation $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ admet au moins une solution réelle.
2. Donner un contre-exemple pour le cas où n est pair.

Exercice 24 (Continuité sur un intervalle stable).

Supposons que f est une fonction continue sur $[0, 1]$ et que $0 \leq f(x) \leq 1$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 25 (Fonction définie par intervalles).

Étudier la continuité de la fonction $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin(\pi/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, sur le domaine de définition.

Exercice 26 (Partie entière et continuité).

Étudier la continuité à gauche, la continuité à droite et la continuité en chaque point de son domaine de définition de la fonction : f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$, où E dénote la partie entière.

Exercice 27 (Raccordements).

Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles g_m définie sur $] -\infty, 3]$ par $g_m(x) = x - m$ et sur $]3, +\infty[$ par $g(x) = 1 - mx$, est une fonction continue.

Exercice 28 (Fonctions continues à valeurs discrètes).

Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues dont l'image est contenue dans $\mathbb{Z}$? dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 29 (Continuité et bornes).

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ supposée continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 30 (Continuité et valeur absolue).

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur I .

1. Soit $a \in I$. Donner une raison pour laquelle l'implication $(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)) \Rightarrow (\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)|)$ est vraie.
2. Remarquer que, pour tout x de I , on a $\sup(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$ et en déduire que, si f et g sont continues, alors la fonction $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$ l'est aussi.