Feuille 3 : Suites réelles

Exercice 1 (Variations).

Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

1. Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}$
2. $u_n = n - 2^n$
3. $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$,
4. $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$
5. $u_n = \dfrac{n-1}{n+3}$
6. $u_n = n - \sinh(n)$.

Exercice 2 (Variations et majorant/minorant).

Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de $\sup_n u_n$ et $\inf_n u_n$.

1. $u_n = 2^n$
2. $u_n = 2^n + \cos(n)$
3. $u_n = 3^{-n}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n+2+(-1)^n}$
5. $u_n = \dfrac{1}{2n+(-1)^n}$

Exercice 3 (Des limites).

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1. $u_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$
2. $u_n = \dfrac{3n^2-2n+3}{n^3-1}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2-5}{n+4}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$
5. $u_n = \dfrac{\sqrt{n+5}+n}{\sqrt{n^2+1}}$
6. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
7. $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
8. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
9. $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{2n+(-1)^n}$
10. $u_n = \cos(n\pi)$
11. $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$
12. $u_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$
13. $u_n = \cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$
14. $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{n}$
15. $u_n = \cos\left(\dfrac{n}{2}\pi\right)$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}}$

Exercice 4 ($(\sin(n))_n$).

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite $(\sin n)_n$ n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_n \sin n = \ell$.

1. En exprimant, pour tout entier naturel n, $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et $\cos n$, montrer que la suite $(\cos n)$ admet une limite $\tilde{\ell}$ et donner une relation entre ℓ et $\tilde{\ell}$.
2. Quelle autre relation existe-t-il entre ℓ et $\tilde{\ell}$?
3. Montrer que, pour tout n, on a $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1$.
4. Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que $\ell = 0$.
5. Conclure.
6. Justifier que la suite $(\sin n)_n$ admet une suite extraite convergente.

Exercice 5 (Suite monotone).

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite ℓ vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$.

Exercice 6 (Avec des ϵ).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels différents de -1 telle que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exercice 7 (Rangs pairs et impairs).

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
2. Soit (v_n) une suite telle que les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers le même réel ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 8 (Limites et somme).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = u_n + v_n$.

1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Que peut on dire de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On suppose que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner un exemple de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergentes telles que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 9 (Opérations sur les limites).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$ soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire w_n comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent aussi vers 0.

Exercice 10 (Suites presque géométriques).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq 5u_n$.
   (b) Montrer qu'alors, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq 5^{n-N} u_N$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose à présent que $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$
   (a) Justifier qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$.
   (b) En raisonnant comme avant, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cette fois vers 0.

Exercice 11 (Suite arithmético-géométrique).
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 8$ et la relation de récurrence $u_n = \frac{1}{2} u_{n-1} + 3$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Résoudre l'équation $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \alpha$. Écrire v_n en fonction de v_{n-1}.
3. Déterminer v_n en fonction de n.
4. Déterminer u_n en fonction de n. Quelle est sa limite ?

Exercice 12 (Suites adjacentes).
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

Exercice 13 (Suites adjacentes - Encore !).

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
3. Étudier la suite $(v_n - u_n)$.
4. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ? De leur limite éventuelle ?

Exercice 14 (Encadrement).

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que pour tout k entre 1 et n, on a :
$$\frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4+1}}.$$
3. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a
$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}.$$
4. Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite est égale à 1.

Exercice 15 (Des suites de moyennes).

Soient a et b deux réels tels que $0 \leq a \leq b$. On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.

On note ainsi : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que $a = 0$. Expliciter les suites (u_n) et (v_n) en fonction de n et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que $a = b$. Étudier les suites u_n et v_n.
3. On suppose que a est strictement positif.
   (a) Montrer que, pour tout n, on a $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$ et $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$.
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et admettent la même limite.

Exercice 16 (Moyenne de Cesàro).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}.$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \ell$. En déduire que (v_n) converge.
3. On note ℓ' la limite de (v_n). Peut-on donner une inégalité entre ℓ et ℓ' ?
4. Établir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

Exercice 17 (Téléscopages !).

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n > 0$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$
À l'aide de la question 1, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 18 (Suite récurrente)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$.

1. Etudier la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x-1}$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Vérifier en particulier que $f([1,+\infty[) = [1, +\infty[$.
2. Justifier que, pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini et appartient à $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 19 (Une autre suite récurrente)**.**
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et vérifie $0 \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 20 (Dichotomie)**.**
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que $f(a) < f(b)$ et on se donne un réel λ de $]f(a), f(b)[$.
On construit deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

— On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
— Puis, pour tout $n \geq 0$:
  — Si $\lambda < f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$;
  — Sinon, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

On note encore, pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{H}_n$ la propriété : « $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ ».

1. Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
2. Énoncer la propriété $\mathcal{H}_0$ et montrer qu'elle est vérifiée.
3. Soit $n \geq 0$ un entier naturel tel que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. Montrer que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.
4. Conclure que, pour tout $n \geq 0$, on a $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ et $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$.
5. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
6. Que peut-on en déduire ? Et concernant la limite de $(f(a_n))_n$ et de $(f(b_n))_n$?