

## Correction Feuille 3 : Suites réelles

### Exercice 1 (Variations).

Étudier la monotonie des suites définies par les termes généraux suivants :

1. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$
2.  $u_n = n - 2^n$
3.  $u_n = \frac{e^n}{n!}$ ,
4.  $u_n = (n+1)(n+2) \dots (n+n)$
5. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{n-1}{n+3}$
6.  $u_n = n - \sinh(n)$ .

### Correction

1. Pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ .

Donc pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n} < 0$$

Donc la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

2.  $u_n = n - 2^n$ .

Pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) - 2^{n+1} - n + 2^n = 1 - 2^n(2-1) \leq 0$$

Donc la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est décroissante (et même strictement décroissante à partir du rang 1).

3.  $u_n = \frac{e^n}{n!}$ ,

Pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n$  est strictement positif, et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{e^n} = \frac{e}{n+1}.$$

Cette suite n'est pas monotone car  $u_{n+1}/u_n$  est supérieur à 1 pour  $n = 0$  et  $n = 1$ , et inférieur à 1 pour tout  $n \geq 2$ . Elle est strictement décroissante à partir du rang 2.

4. On peut commencer par calculer les 1ers termes de la suite :  $u_1 = 2$ ,  $u_2 = 3 \times 4 = 12$ ,  $u_3 = 4 \times 5 \times 6 = 120$ . On remarque que, pour tout  $n$ ,  $u_n$  est le produit de  $n$  entiers consécutifs. On calcule le quotient de deux termes consécutifs :

Soit  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+2)(n+3) \dots (2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+2) \dots (2n-1)(2n)} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \\ &= 2(2n+1) > 1 \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  étant de plus strictement positive, on en déduit qu'elle est strictement croissante.

5.  $u_n = \frac{n-1}{n+3}$

Pour tout  $n \geq 0$ , on a

$$u_n = 1 - \frac{4}{n+3}.$$

La fonction  $x \mapsto 1 - 4/(x+3)$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , donc la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  est strictement croissante.

6.  $u_n = n - \sinh(n)$ .

La fonction  $f : x \mapsto x - \sinh(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et de dérivée  $f' : x \mapsto 1 - \cosh(x)$ .

Pour tout  $x$ ,  $f'(x)$  est donc négatif, donc  $f$  est décroissante. Puisque, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = f(n)$ , on peut conclure que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

### Exercice 2 (Variations et majorant/minorant).

Étudier le sens de variation des suites suivantes. Déterminer également, pour chacune de ces suites, les valeurs de  $\sup_n u_n$  et  $\inf_n u_n$ .

1.  $u_n = 2^n$

3.  $u_n = 3^{-n}$

5.  $u_n = \frac{1}{2n + (-1)^n}$

2.  $u_n = 2^n + \cos(n)$

4.  $u_n = \frac{1}{n+2+(-1)^n}$

### Correction

1.  $u_n = 2^n$

La suite  $(u_n)$  est strictement croissante. Elle est minorée par 1 et  $\inf_{\mathbb{N}} u_n = 1$  et n'est pas majorée :  $\sup_{\mathbb{N}} u_n = +\infty$ .

2.  $u_n = 2^n + \cos(n)$

Pour tout  $n \geq 0$ , on a :  $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n + \cos(n+1) - \cos n = 2^n + \cos(n+1) - \cos n$ .

Pour  $n = 0$  :  $u_1 - u_0 = 1 + \cos(1) - \cos(0) = \cos(1) > 0$ .

Et pour tout  $n \geq 1$  : on a  $2^n \geq 2$  et  $\cos(n+1) - \cos(n) \in [-2, 2]$ , et même  $\cos(n+1) - \cos(n) \in ]-2, 2[$ , donc  $u_{n+1} - u_n > 0$ .

La suite  $(u_n)$  est donc strictement croissante.

Elle n'est pas majorée (parce que pour tout  $n$ ,  $u_n \geq 2^n - 1$ ), et son inf égal à  $u_0 = 2$ .

3.  $u_n = 3^{-n}$

La suite  $(u_n)$  est strictement décroissante. Son inf est égal à 0 et son sup est égal à  $u_0 = 1$ .

4.  $u_n = \frac{1}{n+2+(-1)^n}$

On peut calculer les premiers termes de  $(u_n)$  :

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad u_1 = \frac{1}{2} \quad u_2 = \frac{1}{5} \quad u_3 = \frac{1}{4} \quad \dots$$

La suite  $(u_n)$  n'est donc pas monotone. Mais les suites  $(u_{2k})$  et  $(u_{2k+1})$  sont toutes les deux strictement décroissantes :

$$u_{2k} = \frac{1}{2k+3} \quad \text{et} \quad u_{2k+1} = \frac{1}{2k+2}$$

$(u_{2k})$  admet pour sup le réel  $u_0 = 1/3$  et  $(u_{2k+1})$  admet pour sup le réel  $u_1 = 1/2$ . Donc  $\sup_n u_n = 1/2$ .

De plus, les deux suites  $(u_{2k})$  et  $(u_{2k+1})$  admettent 0 pour borne inf, donc  $\inf_n u_n = 0$ .

5.  $u_n = \frac{1}{2n + (-1)^n}$

Pour tout  $k \geq 0$ , on a :

$$u_{2k} = \frac{1}{4k+1} \quad \text{et} \quad u_{2k+1} = \frac{1}{4k+1}$$

On a donc :  $u_{2k} = u_{2k+1} > u_{2k+2} = u_{2k+3}$ .

La suite  $(u_n)$  est donc décroissante (mais pas strictement décroissante).

On a  $\sup_n u_n = u_0 = 1$  et  $\inf_n u_n = 0$ .

### Exercice 3 (Des limites).

Déterminer les limites éventuelles des suites suivantes, définies par leur terme général.

1.  $u_n = \frac{n+2}{2n-1}$

6.  $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

12.  $u_n = \frac{2^n}{n^{100}}$

2.  $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^3 - 1}$

7.  $u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$

13.  $u_n = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

3.  $u_n = \frac{3n^2 - 5}{n+4}$

8.  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

14.  $u_n = (-1)^n \frac{\cos n}{n}$

4.  $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}}$

9.  $u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n}$

15.  $u_n = \cos\left(\frac{n}{2}\pi\right)$

5.  $u_n = \frac{\sqrt{n+5} + n}{\sqrt{n^2+1}}$

11.  $u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n}$

16.  $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}}$

### Correction

1.  $u_n = \frac{n+2}{2n-1} = \frac{n(1+\frac{2}{n})}{n(2-\frac{1}{n})} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

2.  $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^3 - 1} = \frac{n^2(3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2})}{n^3(1 - \frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} = 3$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

3.  $u_n = \frac{3n^2 - 5}{n+4} = \frac{n^2(3 - \frac{5}{n^2})}{n(1 + \frac{4}{n})} = n \cdot \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}}$ .

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{4}{n}} = 3$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

4.  $u_n = \frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n}\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$ .

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$ .

5.  $u_n = \frac{\sqrt{n+5} + n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n\left(1 + \frac{\sqrt{n+5}}{n}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{n\left(1 + \sqrt{\frac{n+5}{n^2}}\right)}{\sqrt{n^2}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ .

$n = \sqrt{n^2}$  car  $n$  est positif, donc  $u_n = \frac{n(1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}})}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ .

On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1+0}{1} = 1$ .

$$6. u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

$$7. \text{ On a } -1 \leq \sin(n) \leq 1, \text{ donc } \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} \leq \frac{+1}{\sqrt{n}}.$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{+1}{\sqrt{n}} = 0$ . Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}} = 0.$$

$$8. \text{ On a } u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1. \text{ On a posé } h = \frac{1}{n}.$$

Par suite,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^1 = e$ .

$$9. u_n = \frac{n - (-1)^n}{2n + (-1)^n} = \frac{n(1 - \frac{(-1)^n}{n})}{n(2 + \frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{n}}{2 + \frac{(-1)^n}{n}}.$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = 0, \text{ par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

10. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_{2n} = 1$  et  $u_{2n+1} = -1$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas.

$$11. u_n = \frac{3^n - 2^n}{2^n - 3^n} = (-1) \frac{3^n - 2^n}{3^n - 2^n} = -1. \text{ Donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est la suite constante égale à } -1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

$$12. u_n = \frac{2^n}{n^{100}} = \frac{\exp(n \ln(2))}{\exp(100 \ln(n))} = \exp(n \ln(2) - 100 \ln(n)) = \exp\left(n \left(\ln(2) - 100 \frac{\ln(n)}{n}\right)\right).$$

$$\text{Or on sait que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - 100 \frac{\ln(n)}{n} = \ln(2) > 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \cos 0 = 1.$$

$$14. \text{ On a } |u_n| \leq \frac{1}{n}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0.$$

$$\text{Par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

$$15. \text{ Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_{4n} = \cos(2n\pi) = 1 \text{ et } u_{4n+1} = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n} = 0 \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{4n}.$$

Ainsi  $u_n$  n'a pas de limite.

$$16. u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}}$$

On utilise l'expression conjuguée : pour tout  $n \geq 0$ , on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n+3}} \times \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+3}} = \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+3}}{(2n+1) - (2n+3)} = \frac{-1}{2} (\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+3})$$

Donc  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ .

**Exercice 4**  $((\sin(n))_n)$ .

L'objectif de cet exercice est de démontrer que la suite  $(\sin n)_n$  n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde : on suppose donc qu'il existe un réel  $\ell$  tel que  $\lim_n \sin n = \ell$ .

1. En exprimant, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\sin(n+1)$  en fonction de  $\sin n$  et  $\cos n$ , montrer que la suite  $(\cos n)$  admet une limite  $\tilde{\ell}$  et donner une relation entre  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$ .
2. Quelle autre relation existe-t-il entre  $\ell$  et  $\tilde{\ell}$ ?
3. Montrer que, pour tout  $n$ , on a  $\sin(n+1) + \sin(n-1) = 2\sin n \cdot \cos 1$ .
4. Déterminer la limite de chacun des membres de cette égalité et en déduire que  $\ell = 0$ .
5. Conclure.
6. Justifier que la suite  $(\sin n)_n$  admet une suite extraite convergente.

**Correction**

1. Soit  $n$  un entier naturel.  
On a  $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$ .  
Donc  $\cos n = \frac{1}{\sin 1} (\sin(n+1) - \sin n \cos 1)$ .  
Or les suites  $(\sin n)_n$  et  $(\sin(n+1))_n$  admettent toutes les deux la même limite  $\ell$  (si elle existe).  
On en déduit donc que la suite  $(\cos n)$  converge vers  $\tilde{\ell} = \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} \ell$ .
2. Pour tout  $n$ , on sait que  $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ , donc, en passant à la limite, on obtient :  $\ell^2 + \tilde{\ell}^2 = 1$ .
3. On développe le membre de gauche : pour tout  $n \geq 0$ , on a  
$$\sin(n+1) + \sin(n-1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1 + \sin n \cos 1 - \cos n \sin 1 = 2\sin n \cos 1.$$
4. Les suites  $(\sin n)$ ,  $(\sin(n+1))$  et  $(\sin(n-1))$  convergent toutes trois vers  $\ell$  : on a donc  $2\ell = 2\cos 1 \times \ell$ , d'où  $\ell = 0$ .
5. Si  $\ell$  est nul, alors  $\tilde{\ell}$  est également nul.  
Or, on doit avoir  $\ell^2 + \tilde{\ell}^2 = 1$ .  
D'où la contradiction.
6. La suite  $(\sin n)$  est une suite bornée (pour tout  $n$ ,  $u_n$  appartient à  $[-1, 1]$ ), donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite convergente.

**Exercice 5** (Suite monotone).

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de nombres réels définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
2. Montrer qu'elle converge et que sa limite  $\ell$  vérifie :

$$\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1.$$

3. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ .

**Correction**

1. Montrons que la suite  $(u_n)$  est croissante :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \left( \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \right) - \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} \right) - \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left( \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \frac{2(n+1) + 2n+1 - 2(2n+1)}{(2n+1)2(n+1)} \\
 &= \frac{2n+2+2n+1-4n-2}{(2n+1)2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{(2n+1)2(n+1)}
 \end{aligned}$$

Donc  $u_{n+1} - u_n > 0$ , par suite  $u_{n+1} > u_n$ . On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

2. Dans la définition de  $(u_n)$ , on remarque que le terme le plus grand est  $\frac{1}{n+1}$  et le terme le plus petit est  $\frac{1}{2n}$ . De plus,  $u_n$  est défini comme la somme de  $n$  termes. On en déduit l'encadrement

$$\begin{aligned}
 n \left( \frac{1}{2n} \right) &\leq u_n \leq n \left( \frac{1}{n+1} \right) \\
 \frac{1}{2} &\leq u_n \leq \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1
 \end{aligned}$$

Donc  $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ .

Comme la suite est croissante et majorée (par 1), elle converge par le théorème de la convergence monotone vers une limite  $\ell$ , et cette limite vérifie  $\frac{1}{2} \leq \ell \leq 1$ .

3. Soit la suite  $v_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  définie pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Par l'absurde, supposons que  $(v_n)$  converge vers  $\mu$ . On a  $v_{2n} = v_n + u_n$ .  
En prenant la limite on obtient  $\mu = \mu + \ell$ . D'où  $\ell = 0$ . C'est impossible vu l'encadrement de  $\ell$  dans la question 2. On en déduit que  $(v_n)$  n'a pas de limite finie. Comme elle est croissante alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ .

**Exercice 6** (Avec des  $\epsilon$ ).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels différents de  $-1$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1+u_n} = 0$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

### Correction

Soit  $\varepsilon$  un réel de  $]0, 1[$ .

On sait que  $(u_n/(1+u_n))$  tend vers 0, donc il existe un rang  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on a

$$\left| \frac{u_n}{1+u_n} \right| \leq \varepsilon.$$

On a donc, pour tout  $n \geq N$  :  $|u_n| \leq \varepsilon |1+u_n| \leq \varepsilon(1+|u_n|)$ .

On obtient alors, pour tout  $n \geq N$  :  $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ .

Soit maintenant  $\delta$  un réel strictement positif. Il existe  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \delta$ .

Donc il existe un rang  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq \delta$ .

On peut donc conclure que la limite  $(u_n)$  existe et est égale à 0.

**Exercice 7** (Rangs pairs et impairs).

1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite croissante telle que la sous-suite  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi convergente.
2. Soit  $(v_n)$  une suite telle que les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers le même réel  $\ell$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**Correction**

1. On peut utiliser le théorème des gendarmes : pour tout  $n$ ,  $u_{2[n/2]} \leq u_n \leq u_{2[n/2]+2}$   
Ou alors le faire à la main : On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_{2n})$ .  
On sait que la suite  $(u_{2n})$  est croissante, donc, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $u_{2n} \leq \ell$ .  
Soit  $\varepsilon > 0$  un réel.  
Il existe un rang  $N$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait :  $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$ .  
On a alors :  $0 \leq \ell - u_{2n} \leq \varepsilon$  et  $u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$ ,  
Donc  $\ell - \varepsilon \leq u_{2n} \leq u_{2n+2} \leq \ell$ .  
Or la suite  $(u_n)$  est croissante donc, pour tout  $n$ , on a  $u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$ .  
D'où : pour tout  $n \geq N$ ,  $\ell - \varepsilon \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq \ell$ , ce qui implique que

$$|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon.$$

Pour tout  $k \geq 2N$ , on a donc  $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ .

On peut donc conclure la limite de  $(u_n)$  existe.

2. Soit  $(v_n)$  une suite telle que les deux sous-suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers le même réel  $\ell$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  un réel.

Par convergence des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , il existe deux rangs  $N_1$  et  $N_2$  tels que :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \geq N_1, |u_{2n} - \ell| &\leq \varepsilon \\ \text{Et pour tout } n \geq N_2, |u_{2n+1} - \ell| &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Pour tout  $k \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ , on a  $|u_k - \ell| \leq \varepsilon$ .

On peut donc conclure que la limite de la suite  $(u_n)$  existe et est égale à la limite commune des suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ .

**Exercice 8** (Limites et somme).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites telles que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = u_n + v_n$ .

1. On suppose que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Que peut-on dire de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
2. On suppose que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas. Que peut-on dire de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?
3. Donner un exemple de deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  divergentes telles que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit convergente.

**Correction**

1. D'après un théorème du cours,  $(w_n)_n$  converge aussi.
2. Si  $(w_n)_n$  ne converge pas, alors au moins une entre  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  ne converge pas (il s'agit juste de la contraposée de l'implication précédente). Rappel :  
(i) La contraposée de  $P \implies Q$  est  $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$ .  
(ii)  $P \implies Q$  est équivalente à sa contraposée.
3. Il suffit de prendre  $u_n = n$  et  $v_n = -n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 9** (Opérations sur les limites).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites telles que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donnée par  $w_n = u_n^2 + u_n v_n + v_n^2$  soit convergente vers 0.

1. En utilisant une identité remarquable, écrire  $w_n$  comme la somme de 2 carrés.
2. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent aussi vers 0.

**Correction**

1. Pour tout  $n$ , on a :

$$w_n = u_n^2 + 2u_n \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{4}v_n^2 + \frac{3}{4}v_n^2 = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 + \frac{3}{4}v_n^2.$$

2. Du point précédent, on déduit que  $w_n \geq 0$ .

On a

$$0 \leq \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 \leq w_n \quad (i)$$

et

$$0 \leq \frac{3}{4}v_n^2 \leq w_n$$

c'est à dire

$$0 \leq v_n^2 \leq \frac{4}{3}w_n \quad (ii)$$

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ . Le théorème des gendarmes appliqué à (ii) donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^2 = 0$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

De même le théorème des gendarmes appliqué à (i) donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right)^2 = 0$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) = 0$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et que  $u_n = \left(u_n + \frac{1}{2}v_n\right) - \frac{1}{2}v_n$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice 10** (Suites presque géométriques).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs.

1. On suppose que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$ 
  - (a) Justifier qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} \geq 5u_n$ .
  - (b) Montrer qu'alors, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ .
  - (c) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
2. On suppose à présent que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ 
  - (a) Justifier qu'il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$ .
  - (b) En raisonnant comme avant, montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge cette fois vers 0.

**Correction**

**1.(a).** Par définition de limite, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_\varepsilon$ , on a

$$10 - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 10 + \varepsilon.$$

Alors, il suffit de prendre  $\varepsilon = 5$  et  $N = N_\varepsilon$ , et utiliser le fait que  $u_n$  est positif.



2ème méthode :

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 10$ , alors à partir d'un certain rang  $N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5$ , c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 5.$$

Comme  $u_n > 0$ , alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \geq 5u_n.$$

**1.(b).** Par récurrence sur  $n \geq N$ .

Soit  $P(n) : "u_n \geq 5^{n-N}u_N"$ .

$P(N) : "u_N \geq 5^0u_N"$ . Donc  $P(N)$  est vraie.

On suppose  $P(n)$  vraie pour  $n$  fixé.

$P(n+1) : "u_{n+1} \geq 5^{n+1-N}u_N"$ .

On a  $u_{n+1} \geq 5u_n \geq 5 \cdot 5^{n-N}u_N = 5^{n+1-N}u_N$ . Donc  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq N$ .

Ainsi pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ .

2ème méthode :

Pour tout  $n \geq N+1$ , on a :

$$u_{N+1} \geq 5u_N.$$

$$u_{N+2} \geq 5u_{N+1}.$$

...

...

...

...

$$u_n \geq 5u_{n-1}.$$

Multiplions ces inégalités membre à membre (en simplifiant mentalement), nous obtenons une nouvelle inégalité :

$$u_n \geq 5^p u_N$$

où  $p$  est le nombre de ces termes :  $u_{N+1}, u_{N+2}, \dots, u_n$ . On a  $p = n - (N+1) + 1 = n - N$ .

Donc  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ .

Or pour  $n = N$ ,  $u_n = u_N = 5^{n-N}u_N$ .

Ainsi pour tout  $n \geq N$ ,  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ .

**1.(c).** Il s'agit d'une simple conséquence du point précédent, avec le fait que  $u_N > 0$  par hypothèse.

En effet : Comme  $N$  est fixé alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-N} = +\infty$ . Comme  $u_N > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^{n-N}u_N = +\infty$ .

Or  $u_n \geq 5^{n-N}u_N$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**2.(a).** On applique encore une fois la définition de limite (comme on a fait au point 1.a. ci-dessus),

avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ .

2ème méthode :

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ , alors à partir d'un certain rang  $N$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ , c'est à dire :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

Comme  $u_n > 0$ , alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n.$$

**2.(b).** En raisonnant comme avant (par exemple par récurrence) , on prouve que  $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$ .

Comme  $N$  est fixé et que  $-1 < \frac{1}{2} < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = 0$ .

Comme  $u_N > 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N = 0$ .

Or  $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$ , donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

**Exercice 11** (Suite arithmético-géométrique).

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 8$  et la relation de récurrence  $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Résoudre l'équation  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$ .
2. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_n = u_n - \alpha$ . Écrire  $v_n$  en fonction de  $v_{n-1}$ .
3. Déterminer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
4. Déterminer  $u_n$  en fonction de  $n$ . Quelle est sa limite ?

**Correction**

1.  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3 \iff \frac{1}{2}\alpha = 3 \iff \alpha = 6$ .
2. On retranche membre à membre les égalités  $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 3$  et  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 3$ . On obtient  

$$u_n - \alpha = \frac{1}{2}(u_{n-1} - \alpha).$$
Ainsi  $v_n = \frac{1}{2}v_{n-1}$ .
3.  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$ .  
Par suite  $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
4.  $v_n = u_n - \alpha = u_n - 6$ . Donc  $u_n = v_n + 6 = \frac{1}{2^{n-1}} + 6$ .  
On en déduit  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 6$ .

**Exercice 12** (Suites adjacentes).

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

1. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante et que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante.
2. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont convergentes.

**Correction**

1. On remarque que  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$ . Comme  $\frac{1}{(n+1)^2} > 0$  alors  $(u_n)_n$  est croissante. En utilisant cette propriété, on peut écrire

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n(n+1)^2} \left( n + n(n+1) - (n+1)^2 \right) = -\frac{2}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Donc  $(v_n)_n$  est décroissante.

2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ . Comme  $(u_n)_n$  est croissante et  $(v_n)_n$  est décroissante, alors  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont des suites adjacentes, par suite les deux suites sont convergentes vers la même limite.

**Exercice 13** (Suites adjacentes - Encore!).

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  les suites définies pour tout  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
2. Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
3. Étudier la suite  $(v_n - u_n)$ .
4. Que peut-on dire des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ ? De leur limite éventuelle?

**Correction**

1. Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$  donc la suite  $(u_n)$  est croissante.
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. On calcule  $v_{n+1} - v_n$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n \cdot (n+1) + n - (n+1)^2}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+1)!} \end{aligned}$$

Donc la suite  $(v_n)$  est strictement décroissante.

3. Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $v_n - u_n > 0$  et par ailleurs,  $(v_n - u_n)$  tend vers 0.
4. Les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes : l'une est croissante, l'autre est décroissante, et leur différence tend vers 0.

Donc les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et admettent la même limite (qui est égale à  $e = \exp(1)$ ).

**Exercice 14** (Encadrement).

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Montrer que pour tout  $k$  entre 1 et  $n$ , on a :

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

3. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

4. Conclure que la suite  $(u_n)$  converge et que sa limite est égale à 1.

## Correction

1. On a

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707, \quad u_2 = \frac{2}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{18}} \simeq 0.956, \quad u_3 = \frac{3}{\sqrt{82}} + \frac{3}{\sqrt{83}} + \frac{3}{\sqrt{84}} \simeq 0.988$$

2. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $k$  un entier entre 1 et  $n$ .

$$\text{On a } \sqrt{n^4 + 1} \leq \sqrt{n^4 + k} \leq \sqrt{n^4 + n}$$

D'où  $\frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}}$ , qui équivaut à

$$\frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

3. En sommant ces inégalités pour  $k$  entre 1 et  $n$ , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

Donc

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} \leq u_n \leq \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}}.$$

4. On étudie d'abord les limites des suites  $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}})$  et  $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}})$ .

On a, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^{-3}}} \quad \text{et} \quad \frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^{-4}}}$$

Donc les suites de terme général  $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + n}})$  et  $(\frac{n^2}{\sqrt{n^4 + 1}})$  sont toutes les deux convergentes et de limite égale à 1.

Par le théorème des gendarmes, on peut conclure que la suite  $(u_n)$  est également convergente et de limite 1.

**Exercice 15** (Des suites de moyennes). Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $0 \leq a \leq b$ . On considère les suites formées par les moyennes géométriques et arithmétiques successives.

On note ainsi :  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. On suppose dans cette question uniquement que  $a = 0$ . Expliciter les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en fonction de  $n$  et en déduire leur limite.
2. On suppose dans cette question uniquement que  $a = b$ . Étudier les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .
3. On suppose que  $a$  est strictement positif.

- (a) Montrer que, pour tout  $n$ , on a  $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$  et  $v_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ .
- (b) En déduire que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes et admettent la même limite.

## Correction

1. Avec  $a = 0$ , on a  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = b$ ,  $u_1 = 0$  et  $v_1 = b/2$ .

On peut montrer par récurrence que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $u_n = 0$  et  $v_n = b \cdot 2^{-n}$ .

[Initialisation]. En effet, pour  $n = 0$ , on a bien  $u_0 = 0$  et  $v_0 = b \cdot 2^{-0}$ .

[Hérédité]. Soit  $n \geq 0$  un entier. Supposons que  $u_n = 0$  et  $v_n = b \cdot 2^{-n}$  et montrons que  $u_{n+1} = 0$  et  $v_{n+1} = b \cdot 2^{-(n+1)}$ .

En effet :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} = 0$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{v_n}{2} = b \cdot 2^{-(n+1)}$ .

[Conclusion]. La propriété est donc vraie au rang 0 et héréditaire, donc, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \geq 0$  : on a bien, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = 0$  et  $v_n = b \cdot 2^{-n}$ .

On a dans ce cas :  $\lim u_n = 0$  et  $\lim v_n = 0$ .

2. Si  $a = b$ , on peut montrer par une récurrence immédiate que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n = a$  et  $v_n = a$ . Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc des suites constantes et égales. Elles sont alors convergentes et de limite commune  $a$ .
3. On suppose que  $a$  est strictement positif.

(a) Notons, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(n)$  la propriété : «  $a \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq b$  et  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ . »

Montrons par récurrence que cette propriété est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

[Initialisation]. On a  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$ ,  $u_1 = \sqrt{ab}$  et  $v_1 = (a + b)/2$ .

Puisque  $0 \leq a \leq b$ , on a bien  $a \leq u_0 \leq u_1$  et  $v_1 \leq v_0$ .

De plus,

$$v_1 - u_1 = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}{2} \geq 0.$$

On remarque également que, pour tous réels  $y \geq x \geq 0$ , on a

$$y \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y-x})^2 \text{ donc } \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$$

On en déduit

$$v_1 - u_1 \leq \frac{1}{2}(v_0 - u_0)$$

Donc  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

[Hérédité]. Soit  $n \geq 0$  un entier tel que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie. Montrons que  $\mathcal{P}(n+1)$  l'est également.

On a par hypothèse de récurrence :  $u_{n+1} \leq v_{n+1}$  donc  $u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$  et  $v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq v_n$ .

De plus,

$$v_{n+2} - u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + v_{n+1} - 2\sqrt{u_{n+1}v_{n+1}}}{2} = \frac{(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+1}})^2}{2} \geq 0.$$

Et,

$$(\sqrt{v_{n+1}} - \sqrt{u_{n+1}})^2 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \text{ donc } v_{n+2} - u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(v_{n+1} - u_{n+1}).$$

On a donc montré que  $\mathcal{P}(n+1)$  est vérifiée lorsque  $\mathcal{P}(n)$  l'est.

[Conclusion] :  $\mathcal{P}(0)$  est vérifiée et la propriété est héréditaire donc, par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier  $n \geq 0$ .

- (b) La suite  $(u_n)$  est croissante, la suite  $(v_n)$  est décroissante, et la suite  $(v_n - u_n)$  est positive et majorée par une suite géométrique de raison  $1/2$  donc elle tend vers 0.

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes, donc convergentes et admettent la même limite.

### Exercice 16 (Moyenne de Cesàro).

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite croissante de limite  $\ell$ . On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

1. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante.
2. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n \leq \ell$ . En déduire que  $(v_n)$  converge.
3. On note  $\ell'$  la limite de  $(v_n)$ . Peut-on donner une inégalité entre  $\ell$  et  $\ell'$  ?
4. Établir que  $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, en déduire que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\ell$ .

### Correction

1. Soit  $n$  un entier. On calcule  $v_{n+1} - v_n$ .

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{nu_1 + \cdots + nu_n + nu_{n+1} - ((n+1)u_1 + \cdots + (n+1)u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \cdots - u_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Or, la suite  $(u_n)$  est croissante donc, pour tout  $k \leq n$ , on a  $u_k \leq u_{n+1}$ , donc  $v_{n+1} - v_n$  est positif.

La suite  $(v_n)$  est donc croissante.

2. La suite  $(u_n)$  est croissante et de limite  $\ell$  donc, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq \ell$ .

On en déduit que  $v_n \leq \frac{n\ell}{n} = \ell$ .

La suite  $(v_n)$  est donc croissante et majorée (par  $\ell$ ) donc elle est convergente.

3. On a vu que, pour tout  $n$ ,  $v_n \leq \ell$ , donc en passant à la limite, on peut conclure que  $\ell' \leq \ell$ .
4. Soit  $n \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{u_1 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{2n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} + \frac{1}{2} \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \\ &= \frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2} \frac{u_{n+1} + \cdots + u_{2n}}{n} \end{aligned}$$

Or, par croissance de la suite  $(u_n)$ , on a pour tout  $k \geq n$ ,  $u_k \geq u_n$ .

D'où

$$v_{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

5. Les suites  $(v_n)$ ,  $(u_n)$  et  $(v_{2n})$  sont convergentes, donc on peut passer à la limite dans cette inégalité.

On obtient :

$$\ell' \geq \frac{\ell' + \ell}{2}.$$

On en déduit que  $\ell' \geq \ell$ .

Or on a montré dans la question 3 que  $\ell' \leq \ell$ . On peut donc conclure que  $\ell' = \ell$  : la suite  $(v_n)$  est convergente et de même limite que la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 17** (Téléscopages !). 1. Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie pour tout  $n > 0$  par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

À l'aide de la question 1, montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Correction

1. Soit  $k \geq 1$ . On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On obtient :  $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ .

Cela implique que  $(u_n)_n$  est convergente de limite égale à 1.

**Exercice 18** (Suite récurrente). Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$ .

1. Etudier la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{2x - 1}$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ . Vérifier en particulier que  $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$ .
2. Justifier que, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_n$  est bien défini et appartient à  $[1, +\infty[$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
4. En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Correction

1. La fonction  $f$  est continue et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ . On a  $f(1) = 1$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  donc  $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$ .
2. On raisonne par récurrence : on note, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathcal{P}_n$  la propriété : «  $u_n$  existe et appartient à  $[1, +\infty[$  ».
 

[Initialisation].  $\mathcal{P}_0$  est vraie car  $u_0 \geq 1$ .

[Hérédité]. Soit  $n \geq 0$  un entier tel que  $\mathcal{P}_n$  soit vraie.

Alors  $u_n$  appartient à  $[1, +\infty[$ , donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini et appartient à  $[1, +\infty[$ .

Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

[Conclusion]. La propriété est initialisée à  $n = 0$  et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $n \geq 0$  : la suite  $(u_n)$  est bien définie et, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $u_n \geq 1$ .
3. On a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sqrt{2u_n - 1} - u_n = \frac{(\sqrt{2u_n - 1} - u_n)(\sqrt{2u_n - 1} + u_n)}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\ &= \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} \\ &= -\frac{(u_n - 1)^2}{\sqrt{2u_n - 1} + u_n} < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

- Comme la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée par 1, alors elle converge par le théorème de la convergence monotone. On note  $\ell$  sa limite. Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$ , donc en  $\ell$ , on peut passer à la limite dans la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ , et on obtient  $\ell = \sqrt{2\ell - 1}$ .

On résout cette équation :

$$\begin{aligned} \ell = \sqrt{2\ell - 1} &\iff \ell^2 = 2\ell - 1 \text{ et } \ell \geq 0 \\ &\iff (\ell - 1)^2 = 0 \text{ et } \ell \geq 0 \\ &\iff \ell = 1. \end{aligned}$$

On conclut donc que, pour tout  $u_0 \in [1, +\infty[$ , la suite  $(u_n)$  est convergente et de limite  $\ell = 1$ .

**Exercice 19.** On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $u_0 = 1$  et la relation de récurrence  $u_n = \sqrt{1 + u_{n-1}}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On notera  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = \sqrt{1 + x}$ .

- Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  existe et vérifie  $0 \leq u_n \leq 2$ .
- Montrer par récurrence que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Correction

- Par récurrence posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  : " $0 \leq u_n \leq 2$ ".

*Initialisation* : Pour  $n = 0$  on a bien  $u_0 = 1 \in [0, 2]$ . Donc  $P_0$  est vraie.

*Hérédité* : Soit  $n \in \mathbb{N}$  et supposons  $P_n$  vraie, montrons que  $P_{n+1}$  est vraie.

On a  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ . Comme  $u_n \geq 0$  alors  $1 + u_n \geq 0$ . Donc  $u_{n+1}$  existe,  $u_{n+1} \geq 0$  et  $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \leq \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2$ . Donc  $P_{n+1}$  est vraie et ainsi  $P_n$  est héréditaire.

*Conclusion* : Comme  $P_0$  est vraie et que  $P_n$  est héréditaire alors  $P_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- Soit, pour tout  $n \geq 0$ ,  $R_n$  : " $u_n < u_{n+1}$ ". Montrons que  $R_n$  est vraie par récurrence.

$R_0$  : " $u_0 < u_1$ ". Donc  $R_0$  s'écrit " $1 < \sqrt{2}$ ". Ainsi  $R_0$  est vraie.

Soit  $n \geq 0$  un entier. Supposons  $R_n$  vraie.

Montrons que  $R_{n+1}$  : " $u_{n+1} < u_{n+2}$ " est vraie.

Comme  $R_n$  est vraie alors  $u_n < u_{n+1}$ , donc  $1 + u_n < 1 + u_{n+1}$  et par suite  $\sqrt{1 + u_n} < \sqrt{1 + u_{n+1}}$ . Ainsi  $u_{n+1} < u_{n+2}$ . Donc  $R_{n+1}$  est vraie.

En conclusion  $R_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

- Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée (par 2) alors par le théorème de convergence monotone,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. On note  $\ell$  sa limite. La fonction  $f$  étant continue, le réel  $\ell$  vérifie la relation de récurrence d'où  $\ell = \sqrt{1 + \ell}$ . Comme  $u_n \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors  $\ell \geq 0$ .

On a  $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ .

On calcule le discriminant de ce trinôme :  $\Delta = 5$ . Donc les deux racines sont  $\ell_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  et

$$\ell_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On remarque que  $\ell_1 < 0$ . Donc  $\ell_1$  ne convient pas.

On a bien  $\ell_2 \geq 0$ , donc c'est la seule limite possible.

$$\text{Ainsi } \ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**Exercice 20** (Dichotomie). Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $a < b$ . On suppose que  $f(a) < f(b)$  et on se donne un réel  $\lambda$  de  $]f(a), f(b)[$ .

On construit deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de la façon suivante :



- On pose  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .
- Puis, pour tout  $n \geq 0$  :
  - Si  $\lambda < f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ , alors  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  ;
  - Sinon,  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ .

On note encore, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_n$  la propriété : «  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  et  $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$  ».

1. Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$ .
2. Énoncer la propriété  $\mathcal{H}_0$  et montrer qu'elle est vérifiée.
3. Soit  $n \geq 0$  un entier naturel tel que  $\mathcal{H}_n$  est vérifiée. Montrer que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vérifiée.
4. Conclure que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  et  $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$ .
5. En déduire que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.
6. Que peut-on en déduire ? Et concernant la limite de  $(f(a_n))_n$  et de  $(f(b_n))_n$  ?

### Correction

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $[a, b]$ , avec  $a < b$ . On suppose que  $f(a) < f(b)$  et on se donne un réel  $\lambda$  de  $]f(a), f(b)[$ .

On note encore, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mathcal{H}_n$  la propriété : «  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  et  $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$  ».

1. Soit  $n \geq 0$  un entier.

On raisonne par disjonction de cas :

1er cas :  $\lambda < f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ . Dans ce cas,  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ , donc  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ .

2ème cas :  $\lambda \geq f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$ . Dans ce cas,  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  et  $b_{n+1} = b_n$ , donc  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ .

On a donc, pour tout  $n \geq 0$ ,  $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$  : la suite  $(b_n - a_n)$  est géométrique de raison  $1/2$ .

2.  $\mathcal{H}_0$  s'écrit : «  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$  et  $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$  ».

On raisonne par disjonction de cas :

1er cas :  $\lambda < f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)$ . Dans ce cas, on a :

$a_1 = a_0 = a$  et  $b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  donc  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$  et  $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$ .

2ème cas :  $\lambda \geq f\left(\frac{a_0 + b_0}{2}\right)$ . Dans ce cas, on a :

$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$  et  $b_1 = b_0 = b$  donc  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$  et  $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$ .

Dans les deux cas, on a donc bien  $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$  et  $f(a_1) \leq \lambda \leq f(b_1)$  :  $\mathcal{H}_0$  est vérifiée.

3. Soit  $n \geq 0$  un entier naturel tel que  $\mathcal{H}_n$  est vérifiée. Montrons que  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vérifiée.

On raisonne à nouveau par disjonction de cas :

1er cas :  $\lambda < f\left(\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}\right)$ . Dans ce cas,  $a_{n+2} = a_{n+1}$  et  $b_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$ .

Or, par hypothèse de récurrence,  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ .

Donc on a  $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$ .

De plus, par choix de  $(a_{n+2}, b_{n+2})$ , on a  $f(a_{n+1}) = f(a_{n+2}) \leq \lambda \leq f(b_{n+2})$ .

2ème cas :  $\lambda \geq f\left(\frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}\right)$ . Dans ce cas,  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$  et  $b_{n+2} = b_{n+1}$ .

Or, par hypothèse de récurrence,  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ .

Donc on a  $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$ .

De plus, par choix de  $(a_{n+2}, b_{n+2})$ , on a  $f(a_{n+2}) \leq \lambda \leq f(b_{n+2}) = f(b_{n+1})$ .

Dans les deux cas, on aboutit donc à :  $a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$  et  $f(a_{n+2}) \leq \lambda \leq f(b_{n+2})$ , donc la propriété  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vérifiée.

4. La propriété est initialisée pour  $n = 0$  et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

5. La suite  $(a_n)$  est donc croissante et la suite  $(b_n)$  est décroissante. De plus, dans la question 1. on a montré que la suite  $(b_n - a_n)$  est géométrique de raison  $1/2$  donc elle tend vers 0.

On peut donc conclure que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite que l'on notera  $\ell$ .

6. Le réel  $\ell$  appartient à l'intervalle  $[a, b]$  car, pour tout  $n$ , on a  $a \leq a_n \leq \ell \leq b_n \leq b$ .

Les suites  $(f(a_n))$  et  $(f(b_n))$  sont convergentes car  $(a_n)$  et  $(b_n)$  le sont et que  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , et la limite de  $(f(a_n))$  et de  $(f(b_n))$  est égale à  $f(\ell)$ .

On a également montré que, pour tout  $n$ ,  $f(a_{n+1}) \leq \lambda \leq f(b_{n+1})$  donc, en passant à la limite dans ces inégalités,  $f(\ell) \leq \lambda \leq f(\ell)$ .

On a donc nécessairement  $f(\ell) = \lambda$ .

Cette méthode permet donc de justifier que, si  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  et si  $\lambda$  vérifie  $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ , alors il existe un réel de l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(\ell) = \lambda$ . Elle constitue donc une preuve du théorème des valeurs intermédiaires.

Numériquement, cette méthode est intéressante (vitesse de convergence linéaire : pour une estimation à  $10^{-k}$ , il faut un nombre d'étapes proportionnel à  $k$ ).