

Feuille 2 : Fonctions et fonctions usuelles Correction

Exercice 1 (Injection, surjection, bijection).

Les fonctions suivantes sont-elles des injections ? Des surjections ? Des bijections ?

- | | |
|---|--|
| <p>1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$.</p> <p>2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$</p> <p>3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \rightarrow [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$.</p> | <p>4. $f_4 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$.</p> <p>5. $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$.</p> <p>6. $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$.</p> |
|---|--|

Correction

1. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = x^2 + 1$ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.
2. $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$ définie par $f_2(x) = x^2 + 1$ est surjective, mais pas injective ni bijective.
3. $f_3 : [-4, -2] \cup [0, 1] \rightarrow [1, +\infty[$, définie par $f_3(x) = x^2 + 1$ est injective mais pas surjective ni bijective.
4. $f_4 : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f_4(x) = \tan(x)$ est surjective mais pas injective ni bijective.
5. $f_5 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_5(x) = e^x$ est injective, surjective et bijective. .
6. $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par $f_6(x) = e^{x^2}$ est surjective mais pas injective ni bijective.

Exercice 2 (Homographies). Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

1. Trouver 3 réels a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \frac{2x + 3}{x - 1} = a + \frac{b}{x - c}.$$

2. En déduire une suite de transformations explicites du plan transformant le graphe de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ en la courbe représentative de f .
3. Expliquer pourquoi cette démarche fonctionne pour toute fonction du type $h(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$, où α, β, γ et δ sont des constantes réelles telles que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Correction

Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 1}$.

1. On cherche 3 réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de 1, on ait :

$$\frac{2x + 3}{x - 1} = a + \frac{b}{x - c}.$$

Soient a, b et c trois réels. On a, pour tout réel x différent de c :

$$\begin{aligned} a + \frac{b}{x - c} &= \frac{a \times (x - c) + b}{x - c} \\ &= \frac{a \times x + b - a \times c}{x - c} \end{aligned}$$

On choisit $c = 1$, puis a et b de sorte à avoir $a = 2$ et $b - a \times c = 3$, donc $b = 5$.

2. On considère la translation T_1 de vecteur \vec{i} , l'affinité $\phi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 5y \end{pmatrix}$ et la translation T_2 de vecteur $2\vec{j}$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Son image par T_1 est le point $M_1(x + 1, y)$.

L'image de M_1 par ϕ est le point $M_2(x + 1, 5y)$.

Et l'image de M_2 par T_2 est le point $N(x + 1, 5y + 2)$.

$N(x + 1, 5y + 2)$ est donc l'image de M par l'application $\Psi = T_2 \circ \phi \circ T_1$.

On peut noter que T_1 , T_2 et ϕ sont des bijections, donc $T_2 \circ \phi \circ T_1$ est une bijection (de bijection réciproque $T_1^{-1} \circ \phi^{-1} \circ T_2^{-1}$).

Montrons que la courbe représentative de f est l'image par $\Psi = T_2 \circ \phi \circ T_1$ de l'hyperbole $y = 1/x$, que l'on notera \mathcal{H} .

En effet, supposons que $M(x, y)$ appartient à \mathcal{H} : on a donc $y = 1/x$.

Notons N l'image de M par Ψ , et (X, Y) , les coordonnées de N .

On a $X = x + 1$ et $Y = 5y + 2 = \frac{5}{x} + 2 = \frac{5}{X - 1} + 2 = f(X)$.

Donc le point N de coordonnées (X, Y) appartient à la courbe représentative de f .

On a ainsi montré que $\Psi(\mathcal{H})$ est inclus dans \mathcal{C}_f .

Réciproquement : soit $N(X, Y)$ un point de \mathcal{C}_f . Montrons qu'il existe un point M dans \mathcal{H} tel que $N = \Psi(M)$.

Ψ étant bijective, il existe bien un point M de \mathbb{R}^2 tel que $\Psi(M) = N$. Notons (x, y) ses coordonnées. Il reste à vérifier que M appartient à \mathcal{H} , c'est-à-dire que $xy = 1$.

D'après les calculs précédents, on a $X = x + 1$ et $Y = 2 + 5y$. Or N appartient à $\mathcal{C}(f)$ donc on a : $Y = 2 + 5/(X - 1)$

$$\begin{aligned} xy &= (X - 1) \times \frac{Y - 2}{5} \\ &= (X - 1) \times \frac{1}{5} \times \frac{5}{X - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc le point $M = \Psi^{-1}(N)$ appartient bien à \mathcal{H} : N appartient à $\Psi(\mathcal{H})$.

On peut alors conclure que \mathcal{C}_f est inclus dans $\Psi(\mathcal{H})$, et par suite que ces deux ensembles sont égaux.

3. Soient α, β, γ et δ des réels tels que $\gamma \neq 0$ et $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Pour tout réel x différent de $-\delta/\gamma$, on a

$$\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \frac{1}{x + \delta/\gamma}$$

En reprenant la même démarche que dans la question précédente, on voit qu'on peut construire une application affine de \mathbb{R}^2 qui transforme la courbe représentative de h en une hyperbole.

Remarque : le cas $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ est celui des fonctions constantes, et le cas $\gamma = 0$ est celui des fonctions affines.

Exercice 3 (Trinôme).

Soient $a \neq 0$, b et c trois réels. On note $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

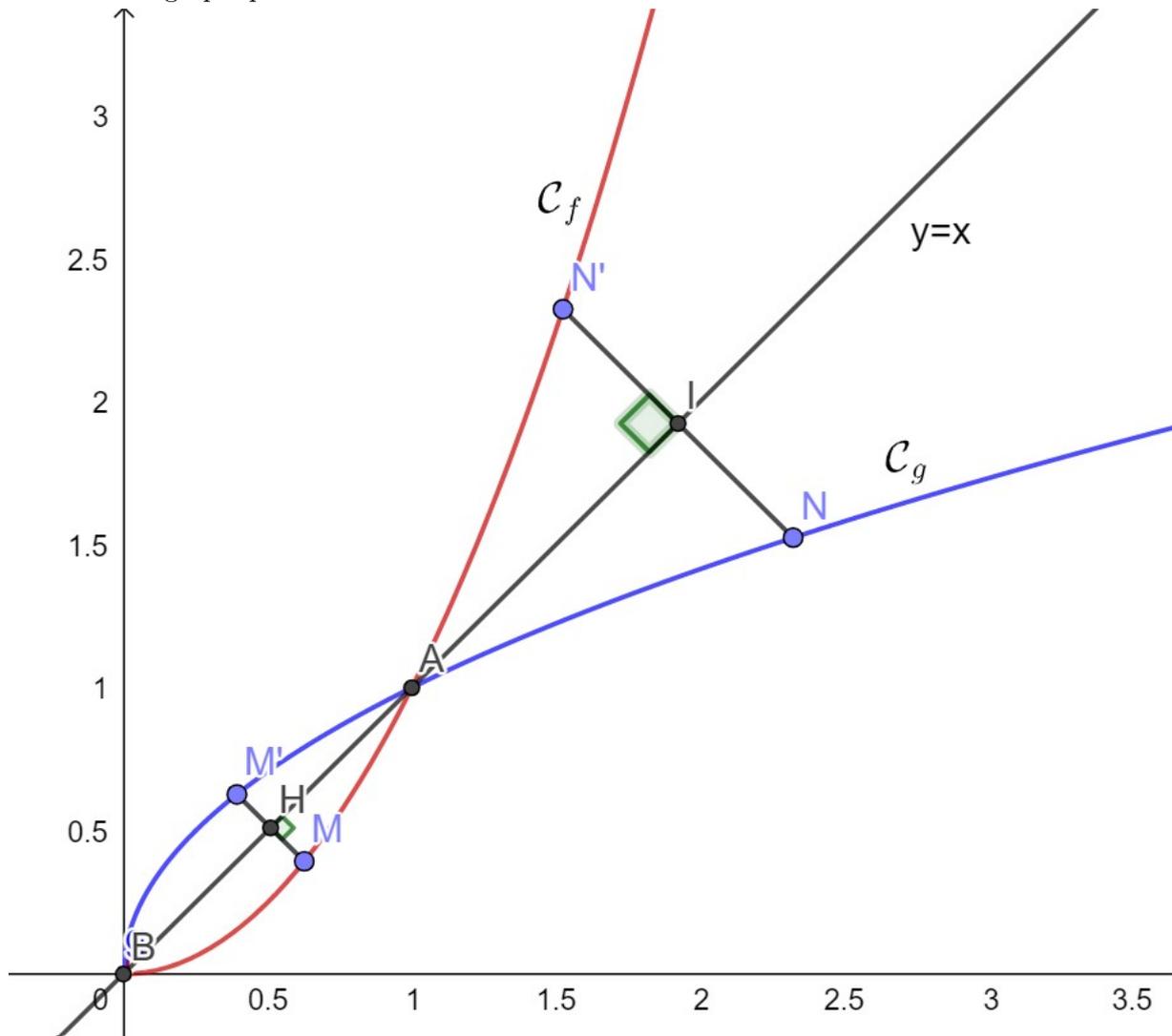
- Rappeler les variations de f en fonction du signe de a .
- Comment s'appelle la courbe représentative de f ? Quelle propriété de symétrie possède-t-elle? Comment cette symétrie se traduit-elle algébriquement?
- Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
- Tracer sur le même graphique une courbe représentative des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$, toutes deux définies sur \mathbb{R}^+ . Pourquoi ces deux courbes sont-elles symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$?

Correction

1. Si a est strictement positif, alors f est décroissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et croissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
Si a est strictement négatif, alors f est croissante sur $]-\infty, -b/(2a)]$ et décroissante sur $[-b/(2a), +\infty[$.
2. La courbe représentative de f est une parabole. Elle est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -b/2a$. Algébriquement, cette propriété de symétrie se traduit par : pour tout réel h , on a

$$f\left(\frac{-b}{2a} + h\right) = f\left(\frac{-b}{2a} - h\right).$$

3. On distingue suivant le signe du discriminant de f , noté Δ :
 - Si Δ est strictement négatif, alors, f ne s'annule pas et, pour tout réel x , $f(x)$ est du signe de a .
 - Si Δ est nul, alors f s'annule en $-b/(2a)$ et est du signe de a sur \mathbb{R} privé de $-b/(2a)$.
 - Si Δ est strictement positif, alors f s'annule en $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et en $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, et est du signe de a en dehors de l'intervalle formé par r_1 et r_2 , et du signe opposé sur l'intervalle formé par r_1 et r_2 .
4. Consulter le graphique ci-dessous.



Soit M un point de la courbe représentative de f et N un point de la courbe représentative de g . Il faut montrer que le symétrique de M par rapport à la droite D d'équation $y = x$ appartient à la courbe représentative de g , et que le symétrique N' de N par rapport à cette même droite appartient à la courbe représentative de f .

Soit $A(x_0, y_0)$ un point du plan. Notons $A' = (y_0, x_0)$.

Le milieu du segment $[A, A']$ est de coordonnées $\left(\frac{x_0 + y_0}{2}, \frac{x_0 + y_0}{2}\right)$, donc il appartient à la droite D .

Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, dont le produit scalaire avec le vecteur $\vec{AA'}$ est nul. Le point A' est donc le symétrique de A par rapport D .

Revenons à M : notons x_0 l'abscisse de M . L'ordonnée de M est égale à x_0^2 , et le symétrique M' de M par rapport à D a pour coordonnées (x_0^2, x_0) . Par définition de f , x_0 est positif, donc $x_0 = g(x_0^2)$: le point M' appartient à la courbe représentative de g .

De même, étudions N et son symétrique par rapport à D . Notons x_1 l'abscisse de N . Son ordonnée est alors égale à $\sqrt{x_1}$, et le symétrique N' de N par rapport à D a pour coordonnées $(\sqrt{x_1}, x_1)$. On a bien $\sqrt{x_1} \geq 0$ et $x_1 = f(\sqrt{x_1})$, donc N' appartient à la courbe représentative de f .

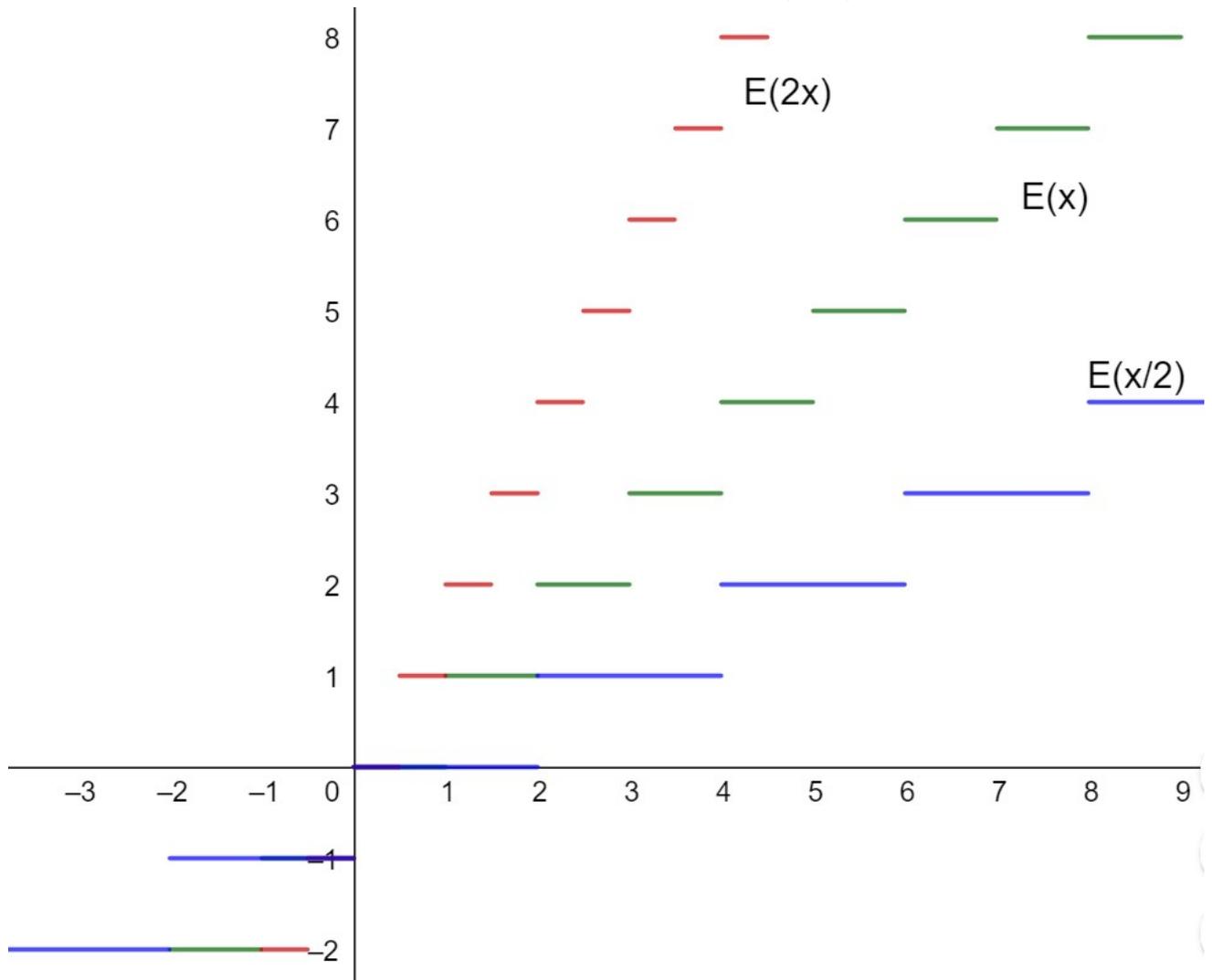
Exercice 4 (Partie entière).

On rappelle que l'on note $E(x)$ la partie entière d'un réel x .

1. Quelle est l'image de \mathbb{R} par la fonction partie entière ?
2. Combien vaut $E(0.5)$? Et $E(-1.5)$?
3. Tracer les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto E(x)$, $x \mapsto E(2x)$ et $x \mapsto E(x/2)$.

Correction

1. Par définition de E , l'image d'un réel par E est un entier relatif, donc $E(\mathbb{R})$ est inclus dans \mathbb{Z} . Réciproquement, l'image de \mathbb{R} par la fonction partie entière est l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs. En effet, pour tout entier relatif k , on a $E(k) = k$, donc \mathbb{Z} est inclus dans $E(\mathbb{R})$.
2. 0 est un entier relatif et $0 \leq 0.5 < 0 + 1$, donc $E(0.5) = 0$.
De même, -2 est un entier relatif et $-2 \leq -1.5 < -2 + 1$, donc $E(-1.5) = -2$.



Exercice 5 (Trigo).

Soient x et y deux réels.

1. Exprimer les réels $\cos(x + y)$, $\cos(2x)$, $\sin(x + y)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$ et $\sin y$.
2. Montrer que $1 + \sin x = \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2$.
3. Exprimer les réels $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
4. Exprimer en fonction de $\tan x$ seulement les expressions suivantes :

$$(a) f_1(x) = \cos^2 x$$

$$(b) f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x}$$

$$(c) f_3(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x}$$

$$(d) f_4(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x.$$

Correction

1. Soient x et y deux réels.

On a $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos 2x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

On a également $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, et $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$.

2. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} \left(\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 1 + \sin x. \end{aligned}$$

3. Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} \cos(4x) &= \cos(2(2x)) & \text{et } \sin(4x) &= \sin(2(2x)) \\ &= 2 \cos^2(2x) - 1 & &= 2 \sin(2x) \cos(2x) \\ &= 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 & &= 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) \\ &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 & &= 8 \sin x \cos^3 x - 4 \sin x \cos x \end{aligned}$$

4. Soit x un réel n'appartenant pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire pour lequel $\tan x$ est bien défini.

(a)

$$\begin{aligned} f_1(x) = \cos^2 x &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\tan^2 x + 1}. \end{aligned}$$

(b) On suppose de plus pour cette question que $|\sin x| \neq |\cos x|$, c'est-à-dire que x n'appartient pas non plus à $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. On a :

$$f_2(x) = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{\tan^4 x + 1}{\tan^4 x - 1}$$

(c) On suppose pour cette question que $\cos x$ est non nul et que $\sin x \neq \cos x$, c'est-à-dire que x n'appartient ni à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, ni à $\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. On a :

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos^3 x (\tan^3 x - 1)}{\cos x (\tan x - 1)} \\ &= \cos^2 x \frac{\tan^3 x - 1}{\tan x - 1} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 x} (\tan^2 x + \tan x + 1) \end{aligned}$$

(d) On suppose pour cette question que x n'appartient pas à $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} f_4(x) &= \cos^2 x - \sin x \cos x = \cos^2 x (1 - \tan x) \\ &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan^2 x} \end{aligned}$$

Exercice 6 (Trigo - encore!).

1. Rappeler les formules d'addition de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.

2. Résoudre l'équation, d'inconnue x :

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

3. Montrer qu'il existe un réel θ tel que, pour tout réel y ,

$$\sin(y + \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y.$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue y :

$$\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Correction

1. Soient a et b deux réels. On a

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{et} \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

2. Soit x un réel.

On résout tout d'abord l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$ sur $] -\pi, \pi]$: sur cet intervalle, $\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

On utilise ensuite la périodicité de la fonction sinus pour résoudre cette équation sur \mathbb{R} :

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ si et seulement si } x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ce qui peut s'écrire aussi : $\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.

3. Soit y et θ deux réels. On a $\sin(y + \theta) = \cos \theta \sin y + \sin \theta \cos y$.

On remarque qu'en choisissant $\theta = \pi/4$, on obtient :

$$\sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y.$$

4. Soit y un réel. On remarque que

$$\begin{aligned} \sin y + \cos y &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin y + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos y \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

On a donc $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $\sin \left(y + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin y + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est donc $\left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

qui est aussi : $\left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exercice 7 (Composition).

1. Soient I, J et K des parties de \mathbb{R} et $f : J \rightarrow K$ et $g : I \rightarrow J$. Montrer que si f et g sont toutes les deux monotones, alors $f \circ g$ est également monotone. Pouvez-vous préciser son sens de variation en fonction de ceux de f et de g ?
2. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions et en déduire leur sens de variation.

(a) $x \mapsto (1 + 2x)^2$;

(b) $x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$;

(c) $x \mapsto \exp(x^2 - 1)$.

Correction

- Le plus simple est probablement de distinguer quatre cas suivant les sens de variation de f et g . On remarque alors que $f \circ g$ est croissante si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, et que $f \circ g$ est décroissante si l'une est croissante et l'autre décroissante. Pour cela, on se donne deux réels quelconques x et y de I vérifiant $x \leq y$, puis on compare $g(x)$ et $g(y)$ en utilisant la monotonie de g , puis on compare $f(g(x))$ et $f(g(y))$ en utilisant la monotonie de f .
- Les décompositions proposées ne sont pas uniques! Chacune des décompositions proposées fait intervenir la fonction carré, qui est bien entendu décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ .
 - Soit $h_1 : x \mapsto (1 + 2x)^2$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction (affine et croissante) $x \mapsto 1 + 2x$ par la fonction carré $y \mapsto y^2$. La fonction carré étant croissante sur \mathbb{R}^+ et décroissante sur \mathbb{R}^- , on en déduit que h est croissante sur $[-0.5, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, -0.5]$.
 - Soit $h_2 : x \mapsto \frac{1}{1 + x^2}$. Cette fonction peut s'écrire comme la composée de la fonction carré par la fonction $y \mapsto 1/(1 + y)$ qui est décroissante sur \mathbb{R}^+ . La fonction h_2 est donc croissante sur \mathbb{R}^- et décroissante sur \mathbb{R}^+ .
 - Soit $h_3 : x \mapsto \exp(x^2 - 1)$. h_3 est la composée de la fonction carré et de la fonction $y \mapsto e^{y-1}$ qui est strictement croissante.
Donc h_3 est décroissante sur \mathbb{R}^- et croissante sur \mathbb{R}^+ .

Exercice 8 (Image directe, image réciproque).

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.

Déterminer les ensembles suivants :

- $f([0, 3])$.
- $f^{-1}([0, 4])$.
- $f^{-1}([-1, 4])$.
- $f^{-1}([\sqrt{2}, 4])$.
- $\sin([0, \pi])$.
- $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$.
- $\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$.
- $\tan^{-1}([-1, 1])$.
- $E([-1.5, 1.5])$.
- $E^{-1}([-1, 1] \cup \{2\})$.

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^2$, et E la fonction partie entière.

On a :

- $f([0, 3]) = [0, 9]$.
- $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$.
- $f^{-1}([-1, 4]) = [0, 2]$.
- $f^{-1}([\sqrt{2}, 4]) = [-2, -\sqrt[4]{2}] \cup [\sqrt[4]{2}, 2]$.
- $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$.
- On utilise le fait que la fonction sin est de période 2π et que $\pi/6$ et $5\pi/6$ sont les 2 réels x de $[-\pi, \pi]$ tels que $\sin x = 1/2$. On a donc : $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- On utilise la périodicité de la fonction sin et le fait que $\sin([-\pi/6, \pi/6]) = [-1/2, 1/2]$ et $\sin([5\pi/6, 7\pi/6]) = [-1/2, 1/2]$. On obtient :

$$\sin^{-1}\left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right]\right) \cup \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]\right).$$

- On utilise la périodicité de la fonction tan, sa monotonie sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et le fait que $\tan[-\pi/4, \pi/4] = [-1, 1]$. On en déduit :

$$\tan^{-1}([-1, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right].$$

- $E([-1.5, 1.5]) = \{-2, -1, 0, 1\}$.
- $E^{-1}([-1, 1] \cup \{2\}) = E^{-1}(\{-1, 0, 1, 2\}) = [-1, 3[$.

Exercice 9 (Réciproque de fonctions circulaires).

1. Soit $f = \cos|_{[2\pi, 3\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[2\pi, 3\pi]$.
Exprimer $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [2\pi, 3\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.
2. Soit $g = \cos|_{[\pi, 2\pi]}$, la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.
Exprimer $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [\pi, 2\pi]$ en utilisant les fonctions arccos et/ou arcsin.

Correction

1. La fonction \cos est 2π -périodique, donc pour tout réel x , on a $\cos(x - 2\pi) = \cos x$.
La fonction arccos a pour ensemble image l'intervalle $[0, \pi]$, donc pour tout x de $[2\pi, 3\pi]$, on a

$$x = 2\pi + \arccos(\cos(x)) = 2\pi + \arccos(f(x))$$

La fonction réciproque de f est donc la fonction \tilde{f} définie sur $[-1, 1]$ par $\tilde{f}(t) = 2\pi + \arccos(t)$.

2. Soit t un réel de $[-1, 1]$. Notons $u = \arccos(t)$. On sait que u appartient à $[0, \pi]$, que $\cos(u) = \cos(2\pi - u)$, et que $2\pi - u$ appartient à $[\pi, 2\pi]$.
On a donc $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$.
On a donc, pour tout $t \in [-1, 1]$, $g^{-1}(t) = 2\pi - \arccos(t)$

Exercice 10 (Réciproque de fonctions circulaires : Calcul).

Calculez les valeurs suivantes :

- | | | | |
|--|---|--|---|
| 1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$. | 3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | 5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ | 7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right)$ |
| 2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ | 4. $\arctan(-1)$ | 6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right)$ | 8. $\tan(\arctan(3))$. |

Correction

- | | |
|---|---|
| 1. $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. | 5. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$ |
| 2. $\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ | 6. $\arctan\left(\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$ |
| 3. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ | 7. $\sin\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ |
| 4. $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ | 8. $\tan(\arctan(3)) = 3$. |

Exercice 11 (Dérivée).

Calculer là où cela est possible les dérivées des fonctions suivantes :

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $f_1 : x \mapsto \sin^2 x$ | 5. $f_5 : x \mapsto \frac{1-x}{2+x}$ | 8. $f_8 : x \mapsto \ln(1+x^4)$ |
| 2. $f_2 : x \mapsto \sin(x^2)$ | 6. $f_6 : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ | 9. $f_9 : x \mapsto \ln\left \frac{1+x}{1-x}\right $ |
| 3. $f_3 : x \mapsto \cos^2(3x)$ | 7. $f_7 : x \mapsto e^{2x+1}$ | 10. $f_{10} : x \mapsto \ln \cos x $ |

Correction

1. La fonction \sin est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et la fonction carré aussi. La fonction f_1 est donc définie et dérivable sur \mathbb{R} . Par les résultats sur les dérivées des fonctions composées, on a, pour tout réel x , $f_1'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin(2x)$.
2. Par les mêmes arguments, on justifie que f_2 est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , on a : $f_2'(x) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$.
3. La fonction f_3 est la composée d'une fonction linéaire, de la fonction \cos et de la fonction carré : elle est donc définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , on a : $f_3'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \sin(3x) \cdot \cos(3x) = 3 \sin(6x)$.

4. La fonction \tan est définie et dérivable sur tout intervalle de la forme $\left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, où k est un entier relatif, donc f_4 est définie et dérivable sur l'intervalle $\left] -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right[$ et sur tout intervalle de la forme $\left] \sqrt{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} \right[$ ou $\left] -\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, -\sqrt{-\frac{\pi}{2} + k\pi} \right[$, pour k un entier naturel non nul.

La dérivée de la fonction \tan étant la fonction $1 + \tan^2$, on a, pour tout x tel que f_4 est bien définie : $f_4'(x) = 2 \cdot x \cdot (1 + \tan^2(x^2))$

5. f_5 est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et pour tout réel x différent de -2 , on a $f_5(x) = -1 + \frac{3}{2+x}$ donc

$$f_5'(x) = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

6. La fonction f_6 est définie pour tout x de $[-1, 1]$, et dérivable (au moins) en tout x de $] -1, 1[$: par dérivée d'une fonction composée, on a

$$f_6'(x) = -2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1-x^2)^{-1/2} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On peut vérifier que f_6 n'est pas dérivable à gauche en 1 et à droite en -1 en étudiant le taux d'accroissement. On a par exemple, pour tout $h \in]0, 2]$

$$\begin{aligned} \frac{f_6(1-h) - f_6(1)}{-h} &= -\frac{\sqrt{1-(1-h)^2} - 1}{h} \\ &= -\frac{\sqrt{2h-h^2}}{h} \\ &= -h^{-1/2} \sqrt{2-h} \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement diverge lorsque h tend vers $0+$, donc f_6 n'est pas dérivable (à gauche) en 1 . De même, f_6 n'est pas dérivable à droite en -1 .

7. f_7 est définie et dérivable sur \mathbb{R} , et on a pour tout réel x : $f_7'(x) = 2e^{2x+1}$.
8. La fonction \ln étant définie et dérivable sur $]1, +\infty[$, la fonction f_7 est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , on a : $f_7'(x) = \frac{4x^3}{1+x^4}$.
9. La fonction f_9 est définie et dérivable pour tout x différent de -1 et 1 . Sa dérivée est un peu plus simple à calculer si on utilise les propriétés de la fonction \ln :
Pour tout réel x différent de 1 et -1 , on a $f_9(x) = \ln|1+x| - \ln|1-x|$.
donc $f_9'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{1-x^2}$.
10. La fonction f_{10} est définie et dérivable pour tout x tel que $\cos(x)$ est non nul, c'est-à-dire, pour tout x n'appartenant pas à $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $f_{10}'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

Exercice 12 (Fonctions hyperboliques).

Montrer que pour tous réels u et v , on a :

$$\begin{aligned} \cosh^2 u + \sinh^2 v &= \sinh^2 u + \cosh^2 v = \cosh(u+v) \cosh(u-v) \\ \cosh^2 u - \cosh^2 v &= \sinh^2 u - \sinh^2 v = \sinh(u+v) \sinh(u-v) \end{aligned}$$

Correction

Soient u et v deux réels.

On a

$$\begin{aligned}\cosh^2 u + \sinh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + 2 + e^{2v} + e^{-2v} - 2) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + e^{2v} + e^{-2v})\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de u et v dans cette dernière expression, on déduit que $\cosh^2 u + \sinh^2 v = \cosh^2 v + \sinh^2 u$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\cosh(u+v)\cosh(u-v) &= \frac{1}{4}(e^{u+v} + e^{-u-v}) \times (e^{u-v} + e^{v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{u+v+u-v} + e^{u+v+v-u} + e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{2v} + e^{-2v} + e^{-2u})\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

De la même façon, et toujours pour deux réels u et v quelconques :

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} + 2 - e^{2v} - e^{-2v} - 2) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} + e^{-2u} - e^{2v} - e^{-2v})\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}\sinh(u+v)\sinh(u-v) &= \frac{1}{4}(e^{u+v} - e^{-u-v}) \times (e^{u-v} - e^{v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{u+v+u-v} - e^{u+v+v-u} - e^{-u-v+u-v} + e^{-u-v+v-u}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2u} - e^{2v} - e^{-2v} + e^{-2u})\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité $\cosh^2 u - \cosh^2 v = \sinh(u+v)\sinh(u-v)$.

De plus, on utilise la relation $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$:

$$\begin{aligned}\cosh^2 u - \cosh^2 v &= 1 + \sinh^2 u - (1 + \sinh^2 v) \\ &= \sinh^2 u - \sinh^2 v.\end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure à la double égalité.

Exercice 13 (Équation - Fonctions hyperboliques).

1. Calculer $\cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$ et $\sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right)$.
2. À l'aide de la formule de calcul du $\cosh(a+b)$, résoudre l'équation d'inconnue réelle x :

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x).$$

Correction

1. On a

$$\begin{aligned} \cosh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) &= \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} + e^{-(\ln 3)/2}\right) & \text{et} & \quad \sinh\left(\frac{1}{2}\ln(3)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{(\ln 3)/2} - e^{-(\ln 3)/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(3^{1/2} + 3^{-1/2}\right) & & \quad = \frac{1}{2}\left(3^{1/2} - 3^{-1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3+1}{\sqrt{3}} & & \quad = \frac{1}{2}\frac{3-1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} & & \quad = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. Notons $u = \frac{1}{2}\ln(3)$.

Pour tous réels a et b , on a $\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$, donc, pour tout réel x , on a

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh u \cdot \cosh x + \sinh u \cdot \sinh x = \cosh(x+u).$$

Résoudre l'équation proposée revient donc à chercher l'ensemble des réels x tels que $\cosh(u+x) = \cosh(5x)$.

Or on sait que deux réels admettent le même cosinus hyperbolique s'ils sont égaux ou opposés.

On a donc

$$\begin{aligned} \cosh(x+u) = \cosh(5x) &\iff x+u = 5x \text{ ou } x+u = -5x \\ &\iff 4x = u \text{ ou } -6x = u \\ &\iff x = \frac{u}{4} \text{ ou } x = -\frac{u}{6} \end{aligned}$$

L'ensemble des réels x vérifiant $\frac{2}{\sqrt{3}}\cosh x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sinh x = \cosh(5x)$ est donc

$$\left\{ \frac{\ln 3}{8}, -\frac{\ln 3}{12} \right\}$$

Exercice 14 (Limite - exp).

1. Discuter en fonction de la valeur du réel a l'existence et la valeur éventuelle de la limite de a^n quand n tend vers $+\infty$.
2. À quelle condition la fonction $x \mapsto a^x$ est-elle bien définie sur \mathbb{R} ? Que pouvez-vous dire dans ce cas de la limite de a^x lorsque x tend vers $+\infty$?

Correction

1. Soit a un réel.
Si a appartient à $] -1, 1[$, alors (a^n) tend vers 0.
Si $a = 1$, alors (a^n) est la suite constante égale à 1.
Si $a > 1$, alors (a^n) diverge vers $+\infty$.
Si $a \leq -1$, alors (a^n) diverge.
2. La fonction $x \mapsto a^x$ est bien définie lorsque a est positif. Sa limite est la même que la limite de la suite (a^n) .

Exercice 15 (Limites - Opérations).

Calculer, si elles existent les limites quand x tend vers $+\infty$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4}$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{x \sin x + x^2}{1 + x^2}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x}$
4. $f_4 : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{1}{x} \ln(2x+3)$

6. $f_6 : x \mapsto \sin \frac{1}{x}$
 7. $f_7 : x \mapsto x + \cos x$

8. $f_8 : x \mapsto e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x)$

9. $f_9 : x \mapsto x - \ln(\cosh x)$.

Correction

1. Pour tout x non nul, $\frac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4} = \frac{x^5}{x^4} \frac{2 + x^{-3}}{1 + x^{-4}}$ donc $\lim_{+\infty} \frac{x^2 + 2x^5}{1 + x^4} = +\infty$.

2. Pour tout x non nul, $\frac{x \sin x + x^2}{1 + x^2} = \frac{x^2}{x^2} \frac{1 + x^{-1} \sin x}{1 + x^{-2}} = \frac{1 + x^{-1} \sin x}{1 + x^{-2}}$.

Or $1 + x^{-2}$ tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$, et $|\sin|$ est bornée (par 1), donc, pour tout x non nul, $|x^{-1} \sin x| \leq |x|^{-1}$. Cela implique que $|x^{-1} \sin x|$ tend vers 0 en $+\infty$ (soit par le théorème des gendarmes, soit en revenant à la définition de la limite).

Finalement : $\lim_{\infty} f_2(x) = 1$.

3. Pour tout $x \geq 1$, $f_3(x)$ est bien définie et $\frac{x\sqrt{x} + 5}{x^2 + \cos x} = \frac{x^{3/2}}{x^2} \frac{1 + 5x^{-3/2}}{1 + x^{-2} \cos x}$ donc $\lim_{+\infty} f_3(x) = 0$.

4. Pour tout $x \geq 1$, $f_4(x)$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \times (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{x+1 - (x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{+\infty} f_4(x) = 0$.

5. Pour tout $x > 0$, on a $\ln(2x + 3) = \ln(x) + \ln \frac{2x + 3}{x}$.

De plus, la limite en $+\infty$ de $x^{-1} \ln(x)$ est nulle, et celle de $\ln \frac{2x + 3}{x}$ est égale à $\ln 2$.

Donc $\lim_{+\infty} f_5(x) = 0$.

6. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, et lorsque u tend vers 0, $\sin u$ tend vers 0.

Donc, par composition de limites, $\lim_{+\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$

7. Pour tout $x > 0$, $f_7(x) = x \times \left(1 + \frac{\cos x}{x}\right)$.

La fonction \cos étant bornée, le théorème des gendarmes permet de justifier que $\lim_{+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Donc $\lim_{+\infty} f_7(x) = +\infty$.

NB : on peut tout aussi bien minorer $f_7(x)$ par $x - 1$, et utiliser une comparaison de limites.

8. On commence par expliciter f_8 à l'aide de la fonction exponentielle : pour tout réel x , on a

$$\begin{aligned} f_8(x) &= e^{-x}(\cosh^3 x - \sinh^3 x) \\ &= \frac{1}{8}e^{-x} (e^{3x} + 3e^x + 3e^{-x} + e^{-3x} - (e^{3x} - 3e^x + 3e^{-x} - e^{-3x})) \\ &= \frac{1}{8}e^{-x} (6e^x + 2e^{-3x}) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x} \end{aligned}$$

Donc $\lim_{+\infty} f_8(x) = \frac{3}{4}$.

9. Pour tout réel x , $\cosh x$ est strictement positif, donc $f_9(x)$ est bien défini.

Soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} f_9(x) &= x - \ln(\cosh x) \\ &= x - \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= x - \ln \left(\frac{e^x (1 + e^{-2x})}{2} \right) \\ &= x - \ln(e^x) - \ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2 \\ &= -\ln(1 + e^{-2x}) + \ln 2 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{+\infty} f_9(x) = \ln 2$.

Exercice 16 (Fonction réciproque - Dérivée).

1. Montrer que \sinh est une bijection continue de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .
2. Calculer explicitement la dérivée de la réciproque \sinh^{-1} à partir d'une formule du cours.
3. Calculer explicitement $\sinh^{-1}(y)$ pour y réel et retrouver le résultat du 2.

Correction

1. La fonction \sinh est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée \cosh qui est strictement positive sur \mathbb{R} . La fonction \sinh est donc strictement croissante \mathbb{R} . Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'elle est bijective de \mathbb{R} sur son ensemble image.

Or $\lim_{-\infty} \sinh = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \sinh = +\infty$, donc la fonction \sinh est une bijection strictement croissante de \mathbb{R} dans lui-même.

2. D'après le cours, si g est la fonction réciproque de f , alors, pour tout y tel que $f'(g(y))$ est non nul,

$$\text{on a : } g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Notons argsh la fonction réciproque de \sinh .

La dérivée de \sinh ne s'annule pas donc, pour tout réel y , on a $\operatorname{argsh}' y = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Argsinh}(y))}$.

De plus, $\sinh(\operatorname{Argsinh}(y)) = y$ et, pour tout x , $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$.

Donc $\cosh(\operatorname{Argsinh}(y)) = \sqrt{1 + y^2}$.

On a donc : $\operatorname{Argsinh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$.

3. Soit y un réel. Déterminons x tel que $\sinh(x) = y$.

On a

$$\begin{aligned} y = \sinh(x) &\iff y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ &\iff e^x - e^{-x} - 2y = 0 \\ &\iff (e^x)^2 - 2y \times e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation de degré 2 en la variable $X = e^x$: il nous faut donc déterminer les racines positives de cette équation.

Déterminons les racines de $X^2 - 2yX - 1 = 0$: il s'agit d'un trinôme en X , dont le discriminant Δ est égal à $\Delta = 4y^2 + 4$ qui est toujours strictement positif.

Les racines de ce trinôme sont donc

$$r_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2} = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

Pour toute valeur de y on remarque que r_1 est négative et r_2 est positive.

En posant $x = \ln X$, on obtient l'antécédent de y par \sinh :

$$\operatorname{Argsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}).$$

Dérivons cette fonction : pour tout y , on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arghsinh}'(y) &= \left(1 + \frac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}\right) \times \frac{1}{y + \sqrt{1+y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1+y^2} + y}{\left(\sqrt{1+y^2} \times (y + \sqrt{1+y^2})\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \end{aligned}$$

Exercice 17 (Fonction réciproque - Dérivée).

Donner les dérivées des fonctions suivantes, là où elles sont définies et dérivables :

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \arccos(\cos(x))$. Calculer sa dérivée $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\pi\}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \arcsin(\sin(x))$. Calculer sa dérivée $g'(x)$ pour tout x où g est dérivable.
3. $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$
4. $x \mapsto \arccos(\sin(x))$
5. $x \mapsto \arctan(\tan(x))$
6. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$

Correction

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \arccos(\cos(x))$.

Cette fonction est la composée de deux fonctions continues (et définies sur des ensembles compatibles), donc elle est bien définie et continue sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto -\sin x$, et la fonction $u \mapsto \arccos u$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $u \mapsto -(1-u^2)^{-1/2}$.

La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$, de dérivée :

$$f'(x) = -\frac{-\sin x}{-\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|} = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

On étudie la dérivabilité en 0 (la situation en $x = k\pi$, pour un entier naturel k est similaire) : on calcule le taux d'accroissement en distinguant les cas $x \in]0, \pi[$ et $x \in]-\pi, 0[$:

1er cas : $x \in]0, \pi[$.

Alors $\arccos(\cos x) = x$ et

$$\begin{aligned} \frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos 0)}{x - 0} &= \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2ème cas : $x \in]-\pi, 0[$.

Alors $\arccos(\cos x) = -x$ et

$$\begin{aligned} \frac{\arccos(\cos x) - \arccos(\cos 0)}{x - 0} &= \frac{-x}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement lorsque x tend vers 0 existent mais sont différentes, donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 (ni en $k\pi$ pour k un entier).

2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \arcsin(\sin(x))$.

Cette fonction est la composée de deux fonctions continues et définies sur des ensembles compatibles, donc g est continue sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée $\cos x$, et la fonction $u \mapsto \arcsin u$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée $u \mapsto 1/\sqrt{1-u^2}$.

La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, et de dérivée

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{|\cos x|} = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

Comme dans la question précédente, on peut calculer les limites à droite et à gauche du taux d'accroissement en $\pi/2$ (ou en $\pi/2 + k\pi$, pour tout entier k) : on remarque que pour tout réel, $\sin(\pi/2 + h) = \sin(\pi/2 - h)$.

1er cas : Soit $h \in]0, \pi[$. On a

$$\begin{aligned} \frac{g(\pi/2 + h) - g(\pi/2)}{h} &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2 + h)) - \arcsin(\sin(\pi/2))}{h} \\ &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2 - h)) - (\pi/2)}{h} \\ &= \frac{\pi/2 - h - \pi/2}{h} \\ &= -1 \end{aligned}$$

2ème cas : Soit $h \in]0, \pi[$. On a

$$\begin{aligned} \frac{g(\pi/2 - h) - g(\pi/2)}{-h} &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2 - h)) - \arcsin(\sin(\pi/2))}{-h} \\ &= \frac{\arcsin(\sin(\pi/2 - h)) - (\pi/2)}{h} \\ &= \frac{\pi/2 - h - \pi/2}{-h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc le taux d'accroissement de g admet des limites différentes à droite et à gauche de $\pi/2$: g n'est donc pas dérivable en $\pi/2$ (ni en $\pi/2 + k\pi$, pour tout entier k).

3. La fonction $x \mapsto \arcsin(\cos(x))$ est continue sur \mathbb{R} et dérivable en tout réel x pour lequel $t \mapsto \arcsin t$ est dérivable en $t = \cos x$, donc pour tout $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

On a alors :

$$(\arcsin(\cos x))' = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = -\frac{\sin x}{|\sin x|} = -\text{sgn}(\sin x).$$

Comme dans l'exercice précédent, on peut vérifier la non dérivabilité en $k\pi$, pour k un entier.

On aurait aussi pu utiliser les résultats de l'exercice précédent ainsi que la relation $\arcsin t + \arccos t = \pi/2$.

4. La fonction $x \mapsto \arccos(\sin(x))$ est continue sur \mathbb{R} et dérivable en tout x pour lequel $t \mapsto \arccos t$ est dérivable en $t = \sin x$, donc pour tout $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

On a alors :

$$(\arccos(\sin x))' = \frac{-\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = -\frac{\cos x}{|\cos x|} = -\text{sgn}(\cos x).$$

5. Soit k un entier. La fonction $x \mapsto \tan x$ est continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, et la fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} . Donc la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$ est continue et dérivable sur ce même intervalle.

Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$, on a $\arctan(\tan x) = x - k\pi$, donc la dérivée de $x \mapsto \arctan(\tan x)$ est constante égale à 1.

La fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$ n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ puisqu'elle n'est pas définie (ni prolongeable par continuité) en ce point.

6. Les deux fonctions $t \mapsto \arctan t$ et $x \mapsto \sin x$ sont définies et dérivables sur \mathbb{R} donc la fonction $x \mapsto \arctan(\sin x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x , on a :

$$(\arctan(\sin x))' = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$$

Études complètes de fonctions

Exercice 18 (Fraction rationnelle).

On définit une fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}.$$

1. Étudier les variations de f .
2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.
3. Calculer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de l'expression

$$f(x) - (x + 2).$$

En déduire que la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote au graphe de f .

4. Déterminer la position du graphe de f par rapport à cette asymptote.
5. Tracer le graphe de f .

Correction

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}.$$

1. On calcule la dérivée de f : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a :

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 3)}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = \frac{x(x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$f'(x)$ est donc du signe de $x(x + 2)$, donc positive sur $] -\infty, -2] \cup [0, +\infty[$, et négative entre -2 et 0 .

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$\text{sgn}(f'(x))$	+	0	-	-	0	+
f						

2. En utilisant les propriétés classiques sur les limites, on détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, ainsi que les limites à droite et à gauche en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = +\infty$$

Cela permet de compléter le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$\text{sgn}(f'(x))$	+	0	-	-	0	+
f						

3. Soit x un réel différent de -1 .

On a

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 2) &= \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} - (x + 2) \\ &= \frac{x^2 + 3x + 3 - (x + 2)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 3 - (x^2 + 3x + 2)}{x + 1} \\ &= \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{+\infty} f(x) - (x + 2) = \lim_{-\infty} f(x) - (x + 2) = 0.$$

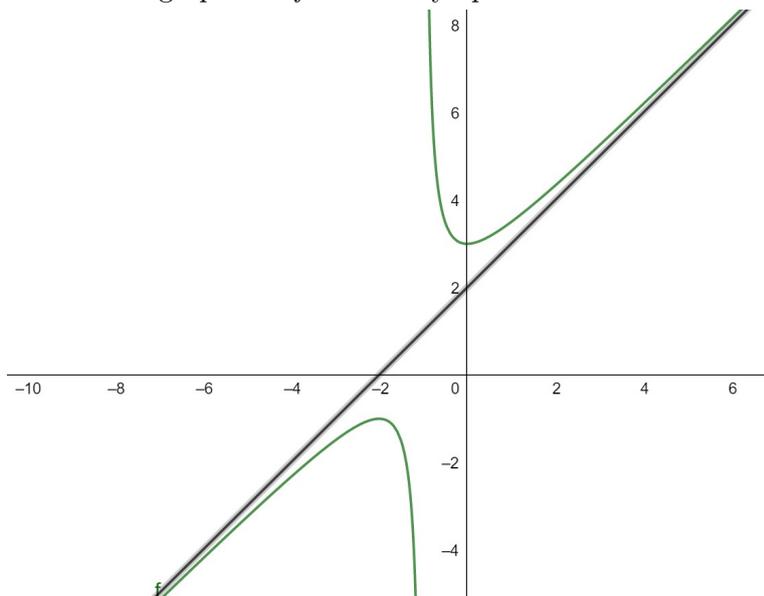
C'est la définition des asymptotes : la courbe représentative de la fonction f admet pour asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$ la droite d'équation $y = x + 2$.

4. Pour déterminer la position du graphe de f par rapport à son asymptote, il faut déterminer le signe de $f(x) - x - 2$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

$x + 1$ est positif lorsque x tend vers $+\infty$, donc la courbe représentative de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

$x + 1$ est négatif lorsque x tend vers $-\infty$, donc la courbe représentative de f est en-dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

5. On trace le graphe de f et son asymptote.



Exercice 19 (Avec un logarithme).

On note f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0, 1[$ et en déduire que f est à valeurs positives.
2. Étudier les variations de g sur $]0, 1[$.
3. Déterminer les limites éventuelles de $g(x)$ pour x tendant vers 0 et pour x tendant vers 1.

Correction

On note f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) + x$ et g la fonction définie sur $]0, 1[$ par $g(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{x}$.

1. On calcule la dérivée de f : soit $x \in]0, 1[$. On a :

$$f'(x) = -\ln(1 - x) + (1 - x) \times \frac{-1}{1 - x} + 1 = -\ln(1 - x)$$

Donc f' est strictement positive sur $]0, 1[$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

On remarque que $f(0)$ est égal à 0, donc f est positive sur $]0, 1[$.

2. La fonction g est continue et dérivable sur $]0, 1[$, et pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{-x}{1 - x} - \ln(1 - x) \right) = \frac{-x - (1 - x) \ln(1 - x)}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}.$$

D'après la question 1, on peut affirmer que, pour tout x de $]0, 1[$, $g'(x)$ est négative, donc g est strictement décroissante sur $]0, 1[$.

3. Soit $x \in]0, 1[$. On a

$$g(x) = \frac{\ln(1-x)}{x} = -\frac{\ln(1-x) - \ln(1)}{(1-x) - 1}.$$

$g(x)$ représente donc l'opposé du taux d'accroissement de la fonction \ln entre $1-x$ et 1 , donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\ln'(1) = -1$.

Pour la limite en 1 , on utilise que $\lim_0 \frac{\ln t}{t} = -\infty$, donc $\lim_1 g(x) = -\infty$.

Exercice 20 (Avec une exponentielle).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

- Déterminer les limites éventuelles de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Étudier les variations de f .
- Tracer sommairement la courbe représentative de f .

Correction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x^2}$.

- En l'infini, l'exponentielle l'emporte sur les puissances, donc $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.
- f est continue et dérivable sur \mathbb{R} . On calcule sa dérivée : soit x un réel. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(1 - 2 \cdot x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) e^{-x^2} \\ &= (1 - 2x^2 - x) e^{-x^2} \end{aligned}$$

Le discriminant Δ de $-2x^2 - x + 1$ est égal à 9 donc les racines de ce trinôme sont $\frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1+3}{-4} = -1$.

$f'(x)$ est donc positif pour tout x de $[-1, 1/2]$ et négatif sinon.

On dresse le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$	
$\text{sgn}(f'(x))$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	0	$-e^{-1/2}$	$e^{-1/4}$	0	

- Pour tracer le graphe de f , on calcule sa valeur en 0 , et on remarque aussi que f s'annule en $-1/2$. On peut également utiliser les valeurs des dérivées sur ces points.

Exercice 21 (Fonctions hyperboliques).

Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{4 - 5 \cosh u}{\sinh u}$$

- Montrer que f est bien définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* . Est-elle paire? Impaire?
- Déterminer les limites éventuelles de f en $+\infty$ et en 0^+ .
- Étudier les variations de f sur \mathbb{R}^* . On attend une expression très simple des points d'annulation de f' .
- Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Correction

Soit f la fonction définie par :

$$f(u) = \frac{4 - 5 \cosh u}{\sinh u}$$

1. \sinh ne s'annule pas sur \mathbb{R}^* , donc f est bien définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}^* .
Elle est impaire car son numérateur est pair et son dénominateur est impair.
2. En $+\infty$, \cosh / \sinh tend vers 1, et $1 / \sinh$ tend vers 0, donc f tend vers -5 en $+\infty$.
En $0+$, f tend vers $-\infty$. 0^+ .
3. On calcule la dérivée de f' : pour tout x non nul,

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{(-5 \sinh u \sinh u - (4 - 5 \cosh u) \cosh u)}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{5(-\sinh^2 u + \cosh^2 u) - 4 \cosh u}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{5 - 4 \cosh u}{\sinh^2 u} \end{aligned}$$

f' s'annule en $u_0 = \operatorname{Argcosh}(5/4)$ et en $-u_0$, elle est positive sur $[-u_0, 0[\cup]0, u_0]$. Elle est négative sur $] -\infty, -u_0] \cup [u_0, +\infty[$.

On peut vérifier par ailleurs que $u_0 = \ln 2$: en effet,

$$\cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{1}{2} \times \left(2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}.$$

Ou alors : On sait que u_0 existe et qu'il est positif.

Soit u un réel positif. On a

$$\begin{aligned} \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \frac{5}{4} &\iff e^{2u} + 1 = \frac{5}{4}e^u \\ &\iff e^{2u} - \frac{5}{4}e^u + 1 = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\operatorname{Argcosh} u = 5/4$ si et seulement si e^u est la racine supérieure à 1 du trinôme $X^2 - \frac{5}{4}X + 1$.

Le trinôme $X^2 - \frac{5}{4}X + 1$ admet pour discriminant $\Delta = 9/4$ et pour racines $X_1 = 1/2$ et $X_2 = 2$.

On en déduit que $e^{u_0} = 2$, donc $u_0 = \ln 2$.

4. Avant de dresser le tableau de variations de f , on détermine $f(\ln 2)$: on sait que $\operatorname{Argcosh}(5/4) = \ln 2$ donc $\cosh(\ln 2) = 5/4$.

De plus,

$$\sinh(\ln 2) = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

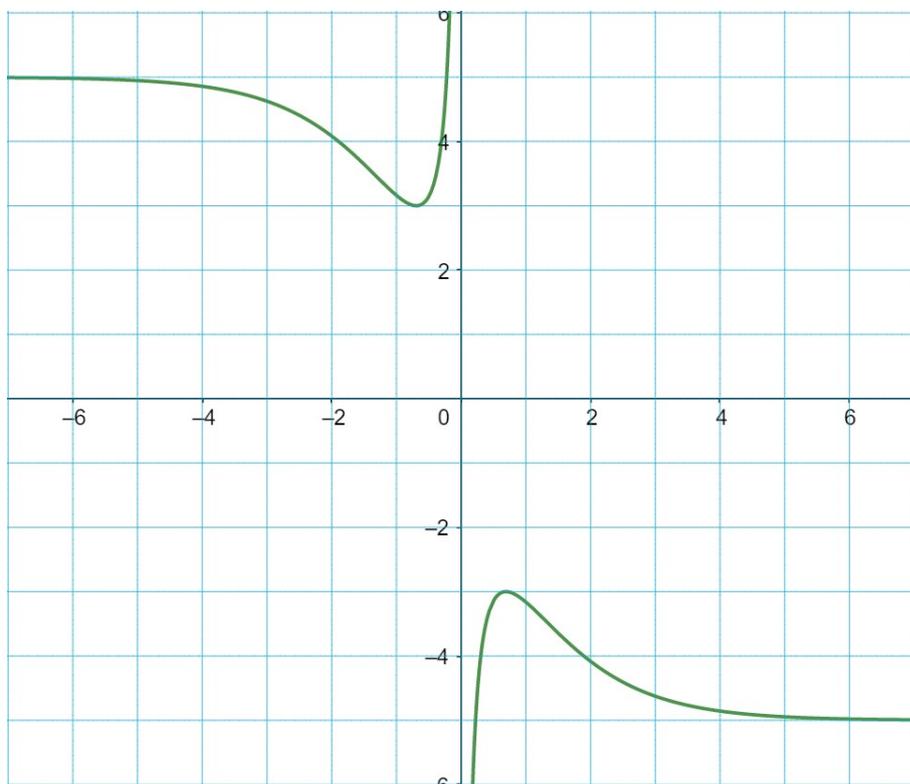
Donc

$$f(\ln 2) = \frac{4 - \frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} = -3.$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$\operatorname{sgn}(f'(x))$		-	0	+	
f	5		3	-3	-5

Et la courbe représentative de f :



Exercice 22 (Fonctions trigo).

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 \sin x + \sin(2x)$.

- Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
- Calculer sa dérivée, puis discuter du signe de celle-ci en fonction de x .
- Dresser le tableau de variations de f .
- Tracer la courbe représentative de f .

Correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 \sin x + \sin(2x)$.

- On peut remarquer que, pour tout x réel, $f(x) = 2 \sin x \cdot (1 + \cos x)$.
 f est définie sur \mathbb{R} , et 2π est une période de f (et π n'en est pas une).
C'est une fonction impaire car les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \sin(2x)$ sont impaires.
On peut donc se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 2 \cos x + 2 \cos(2x) = 2 \cdot (\cos x + 2 \cos^2 x - 1)$$

Le trinôme $2t^2 + t - 1$ admet pour racine -1 et $1/2$. Il est donc positif pour tout t dans $] -\infty, -1] \cup [1/2, +\infty[$ et négatif pour $t \in [-1, 1/2]$.

f' est alors négative pour $\cos x$ dans $[-1, 1/2]$, ce qui correspond à $x \in [\pi/3, \pi]$, et f' est positive pour $x \in [0, \pi/3]$.

f est donc croissante sur $[0, \pi/3]$ et décroissante sur $[\pi/3, \pi]$.

- On dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

x	$-\pi$	$-\pi/3$	$\pi/3$	π			
$\text{sgn}(f'(x))$	0	-	0	+	0	-	0
f	0	$-1.5\sqrt{3}$	$1.5\sqrt{3}$	0			

4. On trace la courbe représentative de f en utilisant la périodicité. On peut également calculer les valeurs de f en $\pm\pi/2$ et déterminer les tangentes en 0 et $\pm\pi/2$.

Exercice 23 (Limites et asymptotes).

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. On note g la fonction définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de g , et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0 .
2. En déduire les variations de f .
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. Déterminer les asymptotes au graphe de f .
5. Tracer ce graphe et ses asymptotes, en veillant à faire figurer les tangentes remarquables.

Correction

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.

1. La fonction g est, comme f , définie sur \mathbb{R}^{+*} . Ces fonctions sont toutes deux continues sur leur ensemble de définition.

La fonction g est la somme de deux fonctions strictement croissantes, donc elle est strictement croissante. On détermine ses limites en $0+$ et en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

Par le théorème de la bijection, g est une fonction continue et strictement monotone, donc elle est bijective de $]0, +\infty[$ sur son ensemble image $] -\infty, +\infty[$.

Il existe donc un unique réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$.

On remarque que $g(1) = 0$, donc $x_0 = 1$.

2. La fonction f s'écrit comme la somme et le quotient de fonctions dérivables, donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

On calcule la dérivée de f : pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x \times \frac{1}{x} + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

La dérivée de f est donc du signe de g . On en déduit que f est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

3. On calcule les limites de f en $0+$ et en $+\infty$ en utilisant les limites de $(\ln x)/x$ en $0+$ et en $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{x} &= -\infty & \text{et} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= +\infty & \text{et} & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{aligned}$$

4. En $+\infty$, $(\ln x)/x$ tend vers 0, donc la limite en $+\infty$ de $f(x) - x$ est nulle : la droite d'équation $y = x$ est l'asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

En $0+$, f tend vers $+\infty$, donc la droite $x = 0$ est l'asymptote à la courbe représentative de f en $0+$.

5. La dérivée de f s'annule en $x = 1$, et $f(1) = 1$, donc la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point $(1, 1)$ (en vert sur le graphique).

On ajoute les deux asymptotes (en rouge).

Exercice 24 (Période).

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos x.$$

- Déterminer son ensemble de définition et sa plus petite période, et discuter sa parité. Au vu de ces informations, choisir un intervalle d'étude approprié.
- Montrer qu'il existe un et un seul x_0 dans $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour lequel $\cos(x_0) = \frac{1}{4}$.
- Étudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
- Dresser le tableau de variations de f puis tracer son graphe.

Correction

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos x.$$

- La fonction f est définie sur \mathbb{R} . Les fonctions \sin et \cos étant de période 2π , f est donc de période 2π . Elle n'est pas de période π car $f(0) = 1/2$ et $f(\pi) = -1/2$. Elle pourrait avoir une période plus petite (par ex. $2\pi/3$...), mais on va voir que ce n'est pas le cas.
La fonction f est paire, donc on peut se contenter de l'étudier sur $[0, \pi]$.
- La fonction \cos est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\cos(\pi/3) = 1/2$ et $\cos(\pi/2) = 0$.
Le réel $1/4$ appartient bien à $[0, 1/2]$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (ou théorème de la bijection) permet donc d'affirmer qu'il existe un unique x_0 tel que $\cos x_0 = 1/4$.
- Calculons la dérivée de f : pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = 2 \sin x \cos x - \frac{1}{2} \sin x = 2 \sin x \left(\cos x - \frac{1}{4} \right)$$

Sur l'intervalle $[0, \pi]$, f' s'annule donc en 0, en x_0 , et en π .

f' est positive sur $[0, x_0]$ et négative sur $[x_0, \pi]$.

f est croissante sur $[0, x_0]$ et décroissante sur $[x_0, \pi]$.

- Avant de dresser le tableau de variation de f , on calcule $f(x_0)$: on sait que $\cos(x_0) = 1/4$ et x_0 appartient à $[0, \pi]$, donc $\sin x_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{15}/4$.

On a donc $f(x_0) = \frac{15}{16} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$.

x	0	x_0	π
$\text{sgn}(f'(x))$	+	0	-
f	0	$f(x_0)$	-0.5

On peut alors tracer le graphe de f :

