Feuille 1 : Nombres réels

Exercice 1 (Automatismes - Puissances)**.**
Pour x et y des réels non nuls, et a et b des entiers, donner une autre écriture des expressions suivantes :

1. $(x^a)^b$
2. x^{a+b}
3. $(x \times y)^a$

Exercice 2 (Automatismes - Simplifications)**.**
Simplifier et calculer les expressions suivantes :

1. $2^3 \times 2^2$
2. $5^3 \cdot 5^{-4}$
3. $\dfrac{3^2}{3^5}$
4. $\left(7^5\right)^3$
5. $\left(2^3\right)^{-2}$
6. $\dfrac{8^3}{4^3}$
7. $\dfrac{5^2 \times 10^3}{2^6}$
8. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
9. $\dfrac{\sqrt{10}\,\sqrt{42}}{\sqrt{35}\,\sqrt{6}}$

Exercice 3 (Automatismes - Simplification d'expressions)**.**
Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

1. $(5x)^3$
2. $(-1)^{2001}$
3. $(-2y)^4$
4. $(4^2)^{\frac{1}{4}}$
5. $(125)^{-2/3}$
6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$
7. $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$
8. $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$
9. $\left[\left(x^2y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$
10. $5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2}$

Exercice 4 (Automatismes - Inégalités)**.**
Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $7x + 9 > 0$
2. $-3x \geq 2$
3. $10x - 1 \leq 5$
4. $-7x - 2 > 0$
5. $11x + 9 \leq -4$
6. $-3x - 2 \geq 7$

Exercice 5 (Inégalités)**.** Vrai ? Faux ? Justifier !

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Exercice 6 (Signe du trinôme)**.**
Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
2. $x^2 - 2x + 1 > 0$
3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
4. $-x^2 + 5x + 14 > 0$
5. $-x^2 - 10x - 25 > 0$
6. $-x^2 + 14x - 49 < 0$

Exercice 7 (Inéquations polynomiales)**.**

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x + 2)^2 < -x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

Exercice 8 (Inéquations - Fractions rationnelles).

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\dfrac{-2}{6x+5} > 1$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{2}{3x+2}$.

Exercice 9 (Équations et inéquations - Valeur absolue).

Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient

1. $|2-x| \leq 3-x$.
2. $|x+2| = |x-7|$.
3. $|x-9| < |x-7|$.
4. $2|x-4| < |x+2|$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $|1-x^4| \leq 4|1-x|$.

Exercice 12. Pour x réel, on note $f(x) = |2-|1-x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f.

Exercice 13 (Polynôme et valeur absolue).

Expliciter trois réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(ax^2+bx+c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x+1|$.

Exercice 14 (Inéquations et équations).

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$ qui vérifient $\dfrac{x-6}{3-x} < \dfrac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Exercice 15 (Manipulation d'inégalités).

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \dfrac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \dfrac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit m et n deux réels.
   Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \dfrac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \dfrac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16 (Moyennes).

Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Exercice 17 (Réunion et intersection d'intervalles).
Simplifier les ensembles suivants.

1. $[1,5]\cap[2,6[$;
2. $[1,5]\cup[2,6[$;
3. $]-\infty,3]\cap[0,+\infty[$;
4. $]-\infty,3]\cup[0,+\infty[$;
5. $[-2,3[\cup\{3\}$;
6. $[-2,3[\cap\{3\}$;
7. $[1,2]\cap[5,6[$;
8. $[1,2]\cup[5,6[$;
9. $([-6,8]\cup[4,6[)\cap[7,10[$;

Exercice 18 (Intervalles). Soient $a\leq b$ et $c\leq d$ des réels. On note $I=[a,b]$ et $J=[c,d]$.

1. Montrer que $I\cap J$ est toujours un intervalle.
2. Sous quelle condition $I\cup J$ est-il un intervalle ?
3. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A\cap B$ soit un intervalle (non vide), sans que ni A, ni B ne soient un intervalle. Même question pour $A\cup B$.
4. Reprendre les questions 1 et 2 avec deux intervalles quelconques I et J.

Exercice 19 (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum).
Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et s'ils admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et un minimum.

1. $A=\{4,-5,10,-9,21,0,-3\}$;
2. $B=[-1,3]$;
3. $C=[0,+\infty[$;
4. $D=]0,+\infty[$;
5. $E=\left\{x\in\mathbb{R},\, x^2<4\right\}$;
6. $F=\{n\in\mathbb{N},\, 4\leq 2^n\leq 1024\}$;
7. $G=\left\{x\in\mathbb{R}^*,\, \dfrac{1}{x}\geq 2\right\}$;
8. $H=\left\{\dfrac{1}{n},\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 20 (Majorant).

1. Rappeler la définition d'une partie A majorée de $\mathbb{R}$.
2. Quels sont les majorants de $[0,1]$? De $[0,1[$?
3. Donner un exemple de partie non majorée de $\mathbb{R}$.
4. On se donne deux parties majorées A et B de $\mathbb{R}$. Tout majorant de $A\cup B$ est-il un majorant de A et de B ? Que peut-on dire d'un majorant de $A\cap B$?

Exercice 21 (Maximum).

1. Rappeler la définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plusieurs maximums (distincts) ?
3. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admettant un maximum est majorée.
4. Écrire une assertion exprimant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
5. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, est-ce que $A\cap B$ et $A\cup B$ admettent des maximums ?