Université Claude Bernard Lyon 1 — UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2024-2025

DS3 – Durée 40 min – le mardi 19 novembre 2024

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.
BIEN INDIQUER SON NUMÉRO DE GROUPE DE TD SUR LA COPIE (A, B ... G)

Question 1. ***a)*** *Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Rappeler les conditions d'existence et la formule de la dérivée de $f \circ g$.*

b) *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ et calculer la dérivée là où elle existe.*

c) *Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\phi : x \mapsto \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$ et calculer la dérivée là où elle existe.*

Question 2. *Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geq 0} = (e^n - n)_{n\geq 0}$.*

Question 3. *On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{4n - \sin(n)}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \ln(n^2)}$. Calculer, si elle existe, la limite de (u_n) quand $n \to \infty$.*

Question 4. *On considère la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$.*

a) *Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4.*

b) *La suite (v_n) est-elle monotone ?*

c) *En utilisant que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $1 \leq k \leq n-2$, on a $\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, montrer que, pour tout $n \geq 2$:*

$$1 \leq v_n \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

d) *En déduire la limite de (v_n).*