

Analyse 1 - Corrigé du contrôle du 19/11/2024

Question 1. a) Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Rappeler les conditions d'existence et la formule de la dérivée de $f \circ g$.

b) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $h: x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ et calculer la dérivée là où elle existe.

c) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\phi: x \mapsto \arctan(\sqrt{x^2 - 1})$ et calculer la dérivée là où elle existe.

a) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables, alors $f \circ g$ l'est et on a :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

b). On utilise la propriété du point a) avec $f: x \mapsto \ln x$ et $g: x \mapsto x^2 + x + 1$.

- g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: c'est un polynôme de degré 2.

On remarque que son discriminant Δ est égal à -3 .

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

- f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- $h = f \circ g$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

c) La fonction $g: x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Elle est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et de dérivée $g': x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

La fonction $f: x \mapsto \arctan x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est la fonction $f': x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

Donc ϕ est définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$
 et dérivable sur $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, et pour tout x
 dans cet ensemble, on a:

$$\phi'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2} \times \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{(1+x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Bonus: on peut utiliser le taux d'accroissement en 1 et
 en (-1) pour vérifier que ϕ n'est pas dérivable en ces 2 points.
 Par exemple en 1: Soit $h > 0$ et $x = 1+h$.

$$\frac{\phi(1+h) - \phi(1)}{h} = \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{(1+h)^2 - 1} - \operatorname{arctan} 0}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{2h+h^2}}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{arctan} \sqrt{2h+h^2}}{\sqrt{2h+h^2}} \times \frac{\sqrt{2h+h^2}}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{arctan} u}{u} \times \frac{\sqrt{2h+h^2}}{h}$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, $\sqrt{2h+h^2} \xrightarrow{0^+} 0$
 et lorsque $u \rightarrow 0$, $\frac{\operatorname{arctan} u}{u} \xrightarrow{0} \operatorname{arctan}'(0) = 1$

Donc, lorsque $h \rightarrow 0^+$, $\frac{\operatorname{arctan} \sqrt{2h+h^2}}{\sqrt{2h+h^2}} \rightarrow 1$

$$\text{Pour tout } h > 0, \quad \frac{\sqrt{2h+h^2}}{h} = \sqrt{\frac{2}{h} + 1}$$

$$\text{Donc } \frac{\sqrt{2h+h^2}}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} +\infty$$

On conclut que $\frac{\phi(1+h) - \phi(1)}{h} \rightarrow +\infty$
 et que ϕ n'est pas dérivable en 1.

Question 2. Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n \geq 0} = (e^n - n)_{n \geq 0}$.

1^{ère} méthode: étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = e^x - x$.

f est dérivable et, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante

2^e méthode: Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e^{n+1} - (n+1) - (e^n - n) \\ &= e^{n+1} - e^n - 1 \\ &= e^n(e - 1) - 1 \end{aligned}$$

Or $e \approx 2,8 > 2$

Donc, pour tout n , $e^n \geq 1$ et $(e-1) > 1$

On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

Question 3. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \frac{4n - \sin(n)}{\sqrt{n^2 + 3n + 1} + \ln(n^2)}$. Calculer, si elle existe, la limite de (u_n) quand $n \rightarrow \infty$.

Soit $n \gg 1$. u_n est bien définie
et on a :

$$u_n = \frac{4 - \frac{\sin n}{n}}{\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \frac{2}{n} \ln n \right)}$$

• $\sin n$ est bornée donc $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n} 0$
et $4 - \frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n} 4$

• $1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \rightarrow 1$ donc $\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n} 1$

• Par croissance comparée, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n} 0$

Donc $\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} + \frac{2}{n} \ln n \xrightarrow{n} 1$

Finalement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$

Question 4. On considère la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$.

a) Calculer v_1, v_2, v_3 et v_4 .

b) La suite (v_n) est-elle monotone ?

c) En utilisant que, pour tout $1 \leq k \leq n-2$, on a $\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq v_n \leq 1 + \frac{2}{n}.$$

d) En déduire la limite de (v_n) .

$$a) \quad v_1 = \frac{1}{1} = 1 \qquad v_2 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$v_3 = \frac{1+2+6}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$v_4 = \frac{1+2+6+24}{24} = \frac{33}{24} = \frac{11}{8}$$

b) On remarque que $v_1 < v_2 = v_3$
et $v_3 > v_4$

La suite (v_n) n'est donc pas monotone.

c) Soit $n \geq 2$ et soit $0 \leq k \leq n-2$.

$$\bullet \quad \frac{k!}{n!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times k}{1 \times 2 \times \dots \times k \times (k+1) \times \dots \times (n-1) \times n} \leq \frac{1}{n(n-1)}.$$

$$\text{Puis} \quad v_n = \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^{n-2} k! + (n-1)! + n! \right)$$

$$\leq \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{1}{n} + 1$$

$$\leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + 1 = \frac{2}{n} + 1$$

• Par ailleurs, pour tout n , $v_n \geq \frac{1}{n!} \times n! = 1$

d) La suite constante $(1)_n$ et la suite $\left(1 + \frac{2}{n}\right)_n$ tendent vers 1 donc, par le théorème des gendarmes, on peut conclure que (v_n) converge et que $\lim v_n = 1$.