Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2024-2025

DS2 Corrigé (inofficiel)

Question 1.

On commence par calculer l'ensemble D :

$$\begin{aligned} D &= A \cup (B \cap C) \\ &= \{0\} \cup (]-1, \tfrac{1}{2}[\cap[\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}[) \\ &= \{0\} \cup [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}[. \end{aligned}$$

Remarque : Un dessin peut être utile pour faire ce calcul.

L'ensemble D est majoré par $\frac{1}{2}$, càd. tout élément de D est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. En fait, tout nombre plus grand ou égal à $\frac{1}{2}$ est un majorant de D. Ainsi, $\frac{1}{2}$ est le plus petit majorant, càd. la borne supérieure de D. Comme $\frac{1}{2} \notin D$, ce n'est pas le maximum. Donc D ne possède pas de maximum.

L'ensemble D est minoré par 0, càd. tout élément de D est supérieur ou égal à 0. En fait, tout nombre plus petit ou égal à 0 est un minorant de D. Ainsi, 0 est le plus grand minorant, càd. la borne inférieure de D. Comme $0 \in D$, c'est le minimum de D.

Question 2.

1. Raisonnons par l'absurde : on considère $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{1}{2}$ tel que $\dfrac{1+x}{2x-1} = \dfrac{1}{2}$. Ceci est équivalent à :

$$2(1+x) = 2x - 1,$$

ce qui à son tour est équivalent à $2 = -1$ ce qui est absurde. Donc la fonction ne prend jamais la valeur $\frac{1}{2}$.

2. Pour montrer que f est une bijection, on va construire sa fonction réciproque. Posons

$$y = \frac{1+x}{2x-1}$$

et cherchons à exprimer x en fonction de y :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & y(2x-1) = 1 + x \\ \Leftrightarrow \quad & 2xy - y = 1 + x \\ \Leftrightarrow \quad & x(2y-1) = 1 + y \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1+y}{2y-1} \end{aligned}$$

C'est une fonction définie sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\}$. La fonction f admet donc une fonction réciproque, elle est donc bijective.

Remarque : Une solution alternative est de montrer que f est injective (en montrant que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$ et de montrer que f est surjective, càd. atteint chaque valeur autre que $\frac{1}{2}$. Une fonction injective et surjective est bijective.

Question 3.

Montrons que g est paire :

$$g(-x) = (f(-x) + f(--x))/2 = (f(-x) + f(x))/2 = g(x).$$

On définit $h = f - g$. Trouvons une expression plus simple pour h :

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - (f(x) + f(-x))/2 \\ &= (f(x) - f(-x))/2. \end{aligned}$$

Montrons que h est impaire :

$$h(-x) = (f(-x) - f(--x))/2 = (f(-x) - f(x))/2 = -h(x).$$

Question 4.

1. On cherche à trouver toutes les valeurs atteintes par la fonction $f(x)$ quand $x \in \mathbb{R}_+$. La fonction $f(x) = e^{-x}$ est décroissante et tend vers 0 quand x tend vers l'infini. De plus $f(0) = 1$. Ainsi $f(\mathbb{R}_+) =]0, 1]$.

2. On chercher à trouver toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \in]0, 1]$. Or, la fonction $g(x) = \sin(x)$ est continue et varie entre -1 et 1. Elle est zéro aux points $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Sur $[0, 2\pi]$, elle est strictement positive sur $]0, \pi[$. Comme elle est 2π-périodique, on obtient :

$$g^{-1}(]0, 1]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k + 1)\pi[.$$