Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2024-2025

Examen – Durée 120 min – le 9 janvier 2025

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1. Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad f(x) = \sin(x^3).$$

1. Calculer f' en tout point de $\mathbf{R}^+$.
2. La fonction f est-elle injective ?
3. La fonction f est-elle surjective ?
4. Déterminer l'ensemble B, l'image réciproque de l'ensemble $\{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble
$$B = f^{-1}(\{0\}) = \{x \geq 0,\ f(x) = 0\}.$$
5. L'ensemble B est-il majoré ?
6. L'ensemble B est-il minoré ?
7. Prouver que la proposition suivante est fausse :
$$\exists A > 0, \quad \forall\, x \geq A, \quad f(x) \geq \frac{1}{2}.$$
8. Montrer l'existence et calculer la limite suivante
$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^4}.$$
9. Comment prolonger f en une fonction paire définie sur $\mathbf{R}$ tout entier ?

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ de terme général $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on a :
$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$
On pourra multiplier par $\sqrt{k}$ et démontrer deux inégalités.
3. En déduire que pour tout $n \geq 2$:
$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) < u_n < 2(\sqrt{n} - 1).$$
4. Montrer l'existence et calculer la limite suivante
$$\lim_{n \to \infty} u_n.$$
5. Déterminer la valeur de $E(u_{100})$, où E désigne la valeur entière. On pourra utiliser que $17+2\sqrt{2} < 2\sqrt{101}$.

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$.

1. **Dans cette question l'entier $n \geq 1$ est fixé.**
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
   (b) Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
   (c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $f_n(\alpha_{n-1})$ est strictement négatif, on pourra utiliser le fait que $(\alpha_{n-1})^{n-1} = (1-\alpha_{n-1})^2$.
2. On considère la suite réelle $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer, en utilisant la question précédente, que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   (b) En déduire qu'elle admet une limite que l'on notera ℓ.
3. (Question indépendante) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeur dans l'intervalle $[0,1]$. On suppose qu'elle converge vers $a \in [0,1[$.
   (a) En utilisant le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a, montrer que
   $$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N \Rightarrow\ u_n \leq \frac{1+a}{2}.$$
   (b) En déduire la limite suivante
   $$\lim_{n\to\infty} (u_n)^n = 0.$$
4. On suppose dans cette question que $\ell < 1$. Justifier en utilisant la question précédente que la suite $((\alpha_n)^n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et aboutir à une contradiction.
5. Conclure quant à la valeur de ℓ.

Exercice 4. On considère la suite définie de la façon suivante $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, où pour tout $x \geq -2$, $f(x) = \sqrt{2+x}$.

1. Montrer que $0 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que
   $$\forall x \in [0,2],\ x \leq \sqrt{2+x}.$$
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
4. Montrer que $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.