Université Claude Bernard Lyon 1 UE Analyse 1 pour les mathématiciens
Semestre d'automne 2024-2025

Examen – Durée 120 min – le 9 janvier 2025

Les documents, les téléphones et les calculatrices ne sont pas autorisés.
La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction des réponses.

Exercice 1. Soit la fonction $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\text{pour tout } x \geq 0, \quad f(x) = \sin(x^3).$$

1. Calculer f' en tout point de $\mathbf{R}^+$.
   Correction : La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x \geq 0$,
   $$f'(x) = 3x^2 \cos(x^3).$$
2. La fonction f est-elle injective ?
   Correction : La fonction f n'est pas injective, en effet on a
   $$f(0) = f(\pi^{1/3}) = 0.$$
3. La fonction f est-elle surjective ?
   Correction : La fonction f n'est pas surjective, en effet on peut montrer facilement que pour tout $x \geq 0$,
   $$|f(x)| \leq 1,$$
   ainsi 2 n'a pas d'antécédent.
4. Déterminer l'ensemble B, l'image réciproque de l'ensemble $\{0\}$, c'est-à-dire l'ensemble
   $$B = f^{-1}(\{0\}) = \{x \geq 0,\ f(x) = 0\}.$$
   Correction : On a
   $$B = \{x \geq 0,\ \sin(x^3) = 0\} = \{x \geq 0,\ \exists k \in \mathbf{N},\ x^3 = k\pi\} = \{(k\pi)^{1/3}, k \in \mathbf{N}\}.$$
5. L'ensemble B est-il majoré ?
   Correction : L'ensemble B n'est pas majoré, en effet il contient la suite $((k\pi)^{1/3})_{k\in\mathbf{N}}$, une suite qui tend vers $+\infty$.
6. L'ensemble B est-il minoré ?
   Correction : L'ensemble B est bien entendu minoré car il est contenu dans l'ensemble des réels positifs.
7. Prouver que la proposition suivante est fausse :
   $$\exists A > 0, \quad \forall\, x \geq A, \quad f(x) \geq \frac{1}{2}.$$
   Correction : En effet cette phrase mathématique est fausse. Supposons qu'elle soit juste, puisque la suite $((k\pi)^{1/3})_{k\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$, il existe $k \in \mathbf{N}$, tel que
   $$(k\pi)^{1/3} \geq A.$$
   Puisque $(k\pi)^{1/3} \in B$ on obtient une contradiction.

8. Montrer l'existence et calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4}.$$

Correction : On a pour tout $x > 0$,

$$|\frac{f(x)}{x^4}| = |\frac{\sin(x^3)}{x^4}| \leq \frac{1}{x^4}.$$

Ainsi puisque $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^4} = 0$, on a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^4} = 0.$$

9. Comment prolonger f en une fonction paire définie sur $\mathbf{R}$ tout entier ?
Correction : Définissons la fonction $\hat{f} : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ de la façon suivante. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ posons $\hat{f}(x) = \sin(|x|^3)$. Il est facile de voir que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\hat{f}(-x) = \hat{f}(x),$$

et que $\hat{f}$ prolonge f sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est monotone.
Correction : Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq 0,$$

ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est croissante donc monotone.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ on a :

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

On pourra multiplier par $\sqrt{k}$ et démontrer deux inégalités.
Correction : Montrons l'inégalité de droite, on a pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \iff 2\sqrt{k(k-1)} < 2k - 1.$$

Mais, puisque tout est positif, on a

$$2\sqrt{k(k-1)} < 2k - 1 \iff 4k^2 - 4k < 4k^2 + 1 - 4k \iff 0 < 1$$

Ainsi l'inégalité de droite est vérifiée.
Montrons maintenant l'inégalité de gauche, on a pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} \iff 2\sqrt{k(k+1)} < 2k + 1.$$

Mais, puisque tout est positif, on a

$$2\sqrt{k(k+1)} < 2k + 1 \iff 4k^2 + 4k < 4k^2 + 1 + 4k \iff 0 < 1$$

Ainsi l'inégalité de gauche est vérifiée.

3. En déduire que pour tout $n \geq 2$:
$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}) < u_n < 2(\sqrt{n}-1).$$
Correction : D'après la question précédente, on a $\forall k \in \mathbf{N}^*$,
$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}).$$
Soit $n \geq 2$, si on additionne les inégalités pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, on obtient :
$$2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < u_n < 2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}).$$
Mais $2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$ est une somme télescopique et on a
$$2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2})$$
et de même on a
$$2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) = 2(\sqrt{n}-1).$$
Ainsi on a le résultat demandé,
$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}) < u_n < 2(\sqrt{n}-1).$$

4. Montrer l'existence et calculer la limite suivante
$$\lim_{n\to\infty} u_n.$$
Correction : on sait que la suite $(2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}))_{n\geq 2}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, d'après l'inégalité précédente et le théorème du cours, on sait que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ admet une limite et on a
$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

5. Déterminer la valeur de $E(u_{100})$, où E désigne la valeur entière. On pourra utiliser que $17+2\sqrt{2} < 2\sqrt{101}$.
Correction : si $n = 100$, l'inégalité démontrée à la question 3 montre que
$$2(\sqrt{101}-\sqrt{2}) < u_{100} < 18.$$
Mais d'après l'indication, on a
$$17 < 2(\sqrt{101}-\sqrt{2}),$$
donc on peut conclure que
$$17 < u_{100} < 18.$$
D'après la définition de la partie entière, on a
$$E(u_{100}) = 17.$$

Exercice 3. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$.

1. **Dans cette question l'entier $n \geq 1$ est fixé.**

(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
Correction : la fonction f_n est dérivable et pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + 2(1-x).$$

Mais pour tout $x \in]0,1[$, on a $(1-x) > 0$. Donc pour tout $x \in]0,1[$, $f_n'(x) > 0$. Il est facile de voir que cette inégalité est encore valable aux bords, $x = 0$ et $x = 1$.
Donc f_n est strictement croissante sur son ensemble de définition.

(b) Justifier l'existence d'un unique réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
Correction :
On a $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = 1 > 0$. Puisque f_n est continue sur $[0,1]$, d'après le TVI il existe un réel $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$. Puisque la fonction f_n est strictement croissante, le réel α_n est unique.

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $f_n(\alpha_{n-1})$ est strictement négatif, on pourra utiliser le fait que $(\alpha_{n-1})^{n-1} = (1-\alpha_{n-1})^2$.
Correction :
Pour tout $n \geq 2$, on a en utilisant légalité précédente,

$$f_n(\alpha_{n-1}) = (\alpha_{n-1})^n - (1-\alpha_{n-1})^2 = (\alpha_{n-1})^n - (\alpha_{n-1})^{n-1} = (\alpha_{n-1})^{n-1}(\alpha_{n-1} - 1).$$

Mais $\alpha_{n-1} \in]0,1[$, donc $(\alpha_{n-1} - 1) < 0$ et donc $f_n(\alpha_{n-1}) < 0$.

2. On considère la suite réelle $(\alpha_n)_{n\geq 1}$.

(a) Montrer, en utilisant la question précédente, que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
Correction : puisque $f_n(\alpha_{n-1}) < 0$, $f_n(\alpha_n) = 0$ et que la fonction f_n est strictement croissante, on a forcément $\alpha_{n-1} \leq \alpha_n$.

(b) En déduire qu'elle admet une limite que l'on notera ℓ.
Correction : la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par 1, elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.

3. (Question indépendante) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeur dans l'intervalle $[0,1]$. On suppose qu'elle converge vers $a \in [0,1[$.

(a) En utilisant le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers a, montrer que

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geq N \Rightarrow\ u_n \leq \frac{1+a}{2}.$$

Correction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $a \in [0,1[$, posons $\varepsilon = \frac{1-a}{2} > 0$. D'après la définition de la convergence, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a

$$u_n - a \leq \varepsilon,$$

soit donc d'après ce choix de ε,

$$u_n \leq \frac{1+a}{2}.$$

(b) En déduire la limite suivante

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^n = 0.$$

Correction : d'après l'inégalité démontrée à la question précédente, on a pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq (u_n)^n \leq (\frac{1+a}{2})^n,$$

où on a vérifié que les termes sont bien positifs. Mais puisque $a \in [0,1[$, on a $\frac{1+a}{2} \in [0,1[$, donc

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1+a}{2})^n = 0.$$

On peut donc conclure que

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $\ell < 1$. Justifier en utilisant la question précédente que la suite $((\alpha_n)^n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et aboutir à une contradiction.

   Correction : Nous savons que pour tout $n \geq 2$ on a
   $$(\alpha_n)^n = (1-\alpha_n)^2.$$
   D'après la question précédente, si $\ell \in [0,1[$ alors $((\alpha_n)^n)_{n\geq 1}$ converge vers 0. Mais d'après légalité précédente, on a que la suite $((\alpha_n)^n)_{n\geq 1}$ converge vers 1 ce qui est une contradiction car $\ell \in [0,1[$.

5. Conclure quant à la valeur de ℓ.

   Correction : on sait que $\ell \in [0,1]$. On a montré dans la question précédente que $\ell \notin [0,1[$, ainsi $\ell = 1$.

Exercice 4. On considère la suite définie de la façon suivante $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, où pour tout $x \geq -2$, $f(x) = \sqrt{2+x}$.

1. Montrer que $0 < u_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Correction : montrons ce résultat par récurrence sur l'indice n.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons la propriété $\mathcal{P}_n$: $0 < u_n < 2$.

   Initialisation. $\mathcal{P}_1$ et bien vérifiée.

   Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$. Ainsi on sait que $0 < u_n < 2$. Mais il est facile de vérifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbf{R}^+$. Ainsi on a
   $$f(0) < f(u_n) < f(2)$$
   soit donc
   $$0 < \sqrt{2} < u_{n+1} < 2.$$
   Ainsi on a bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$ ce qui achève la récurrence.

   On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 2$.

2. Montrer que
   $$\forall x \in [0,2],\ x \leq \sqrt{2+x}.$$
   Correction : soit $x \in [0,2]$, on a
   $$x \leq \sqrt{2+x} \ \Leftrightarrow x^2 \leq x+2 \ \Leftrightarrow 0 \leq -x^2+x+2$$
   Mais on a
   $$-x^2+x+2 = -(x+1)(x-2) \geq 0$$
   car $x \in [0,2]$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

   Correction : Soit $n \geq 1$. On sait que $u_n \in [0,2]$, donc d'après l'inégalité précédente, on a
   $$u_n \leq \sqrt{2+u_n}.$$
   soit donc
   $$u_n \leq f(u_n) = u_{n+1}.$$
   Ainsi la suite est bien croissante.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et calculer sa limite.

   Correction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée par 2, ainsi elle converge vers une limite ℓ. On sait que $\ell \in [0,2]$ et on sait aussi que ℓ est un point fixe de la fonction f. Ainsi on a
   $$\ell = \sqrt{2+\ell}.$$
   soit donc $(\ell+1)(\ell-2) = 0$ ou bien $\ell \in \{-1,2\}$. Mais puisque $\ell \in [0,2]$, on en déduit que $\ell = 2$.

4. Montrer que $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Correction : Montrons directement cette assertion par récurrence. Posons $v_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons que $u_n = v_n$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons la propriété $\mathcal{P}_n : u_n = v_n$.

   Initialisation. $\mathcal{P}_1$ et bien vérifiée. En effet on a $u_1 = \sqrt{2}$ et $v_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

   Hérédité. Soit $n \geq 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vérifiée et on montre $\mathcal{P}_{n+1}$. On sait donc que $u_n = v_n$ et on montre que $u_{n+1} = v_{n+1}$.

   On sait que $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, il suffit donc de montrer que $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$, soit donc que $v_{n+1}^2 = 2 + v_n$. Mais on sait que pour tout $a \in \mathbf{R}$,

   $$\cos(2a) = 1 + 2\cos^2(a).$$

   Si on applique cette formule à $a = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ on obtient

   $$\cos(\frac{\pi}{2^n}) = 2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+1}}) - 1$$

   soit donc

   $$\frac{v_n}{2} = \frac{v_{n+1}^2}{2} - 1,$$

   ou bien

   $$v_{n+1}^2 = 2 + v_n,$$

   ce qu'il fallait démontrer. Ainsi on a bien montré $\mathcal{P}_{n+1}$ ce qui achève la récurrence.

   On a donc montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.