



Licence 1 Mathématiques Informatique.

ANALYSE 1 POUR INFORMATIENS

Christophe Poquet

Année universitaire 2024/2025

Table des matières

1	Nombres réels	3
1.1	Ensembles de nombres	3
1.1.1	Les entiers naturels	3
1.1.2	Les entiers relatifs	3
1.1.3	Les nombres rationnels	3
1.1.4	Les nombres décimaux	4
1.1.5	Les nombres réels	4
1.2	Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels	5
1.3	Valeur absolue	6
1.4	Intervalles	6
1.5	Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure	7
2	Fonctions réelles	9
2.1	Fonctions et graphes	9
2.2	Fonctions injectives, surjectives, bijectives	10
2.2.1	Image, antécédent.	10
2.2.2	Surjectivité.	10
2.2.3	Injectivité.	11
2.2.4	Bijektivité.	11
2.3	Image directe, image réciproque.	12
2.4	Opérations sur les fonctions.	13
2.4.1	Somme, produit, quotient.	13
2.4.2	Composition.	14
2.5	Propriétés des fonctions et de leur graphe.	14
2.5.1	Fonction majorée, minorée, bornée.	14
2.5.2	Monotonie.	14
2.5.3	Parité et périodicité.	15
2.6	Limite en un point, continuité, dérivabilité.	15
2.6.1	Limite en un point.	16
2.6.2	Continuité.	16
2.6.3	Dérivabilité.	16
3	Fonctions usuelles	17
3.1	Fonctions polynomiales	17
3.2	Fonction partie entière	17
3.3	Fonctions trigonométriques	18
3.4	Fonctions trigonométriques réciproques	20
3.5	Fonctions exponentielle et logarithme	22
3.6	Fonctions hyperboliques	23
3.7	Fonctions puissance	24
3.8	Croissance comparée	25

4	Suites réelles	26
4.1	Définitions	26
4.2	Suites classiques	27
4.3	Convergence de suite	28
4.4	Opérations sur les limites	29
4.5	Limites de suites et inégalités	31
4.6	Convergence et monotonie	32
4.7	Suites extraites	33
4.8	Limites infinies	33
4.9	Comparaison de suites	36
4.10	Suites de Cauchy	38
5	Continuité des fonctions réelles	39
5.1	Limite de fonction	39
5.2	Continuité	42
5.3	Théorème des valeurs intermédiaires et image continue d'un intervalle	43
5.4	Limite, continuité et monotonie	44

Chapitre 1

Nombres réels

1.1 Ensembles de nombres

1.1.1 Les entiers naturels

L'ensemble \mathbb{N} défini par

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

est l'ensemble des entiers naturels. Si l'on enlève le 0 on définit $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls.

1.1.2 Les entiers relatifs

En ajoutant les entiers négatifs on définit l'ensemble des entiers relatifs par

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

De même, si l'on enlève le 0, on définit $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

Remarque 1.1.

1. On remarque que l'ensemble \mathbb{N} est **inclus** dans l'ensemble \mathbb{Z} , ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z},$$

où le symbole \subset se lit « est inclus dans ». En effet, tout élément de \mathbb{N} est également élément de \mathbb{Z} , ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$\text{si } n \in \mathbb{N}, \quad \text{alors } n \in \mathbb{Z},$$

où le symbole \in se lit « appartient à ».

2. On voit immédiatement que l'inclusion réciproque est fautive, c'est-à-dire $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, puisque par exemple $-1 \in \mathbb{Z}$ alors que $-1 \notin \mathbb{N}$.
3. Attention à ne pas confondre les symboles \subset et \in !

1.1.3 Les nombres rationnels

On définit l'ensemble des nombres rationnels \mathbb{Q} comme l'ensemble des fractions d'entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Remarque 1.2.

1. Puisque tout entier relatif n peut être écrit sous la forme

$$n = \frac{n}{1},$$

on a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. Un nombre rationnel peut être représenté par différentes fractions, par exemple $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \dots$. Plus précisément, pour $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{si et seulement si} \quad ab' = a'b.$$

Attention, l'expression « P si et seulement si Q », que l'on peut abrégé en « P ssi Q » ou « $P \Leftrightarrow Q$ » (voir le cours d'Algèbre 1), signifie deux choses : « si P est vraie alors Q est vraie » et « si Q est vraie alors P est vraie ».

1.1.4 Les nombres décimaux

On définit l'ensemble des nombres décimaux \mathbb{D} de la manière suivante :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Il s'agit des nombres ayant une suite **finie** de chiffres à droite de la virgule.

Remarque 1.3.

1. Tous les éléments de \mathbb{D} peuvent être écrit sous forme de fraction, et donc $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.
2. L'inclusion réciproque est fausse, puisque certaines fractions ne peuvent être écrites qu'avec une infinité de chiffres après la virgule, comme par exemple

$$\frac{1}{3} = 0.3333333333333333333333333333 \dots$$

L'ensemble \mathbb{D} donne un rôle privilégié au nombre 10 (les dix doigts des mains). Du point de vue des mathématiciens, les ensembles \mathbb{Q} et \mathbb{R} sont plus importants.

1.1.5 Les nombres réels

L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est l'ensemble des nombres dont l'écriture décimale est composée de

- un signe $+$ ou $-$ (généralement omis lorsque c'est le $+$),
- une suite finie de chiffres entre 0 et 9, ne commençant pas par 0 ou étant réduite à 0,
- une virgule,
- une suite finie ou infinie de chiffres entre 0 et 9.

Exemples 1.4. Par exemple 0, 4, -10.3 , $\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$, π sont des nombres réels.

Remarque 1.5.

1. Attention avec cette définition un réel ne s'écrit pas de manière unique, par exemple $1 = 1.0$, $0 = 0.0 = -0 = -0.00$, $1 = 0.9999999999 \dots$.
2. On a l'inclusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, mais l'inclusion réciproque est fausse, on ne peut par exemple pas écrire $\sqrt{2}$ comme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ (voir le cours d'Algèbre 1).

1.2 Opérations et relation d'ordre dans l'ensemble des réels

Dans l'enfance on apprend à additionner, multiplier et comparer les entiers. Ceci s'étend aux nombres réels (résultat admis, fastidieux à démontrer).

Proposition 1.6. *On peut définir sur \mathbb{R} une addition $+$ et une multiplication \cdot (ou \times) qui prolongent l'addition et la multiplication de \mathbb{N} et ont les propriétés suivantes :*

1. **commutativité** : pour tous a, b dans \mathbb{R} on a

$$a + b = b + a \quad \text{et} \quad a \cdot b = b \cdot a,$$

2. **associativité** : pour tous a, b, c dans \mathbb{R} on a

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{et} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c,$$

3. **distributivité** : pour tous a, b, c dans \mathbb{R} on a

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$

4. **éléments neutres** : pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$a + 0 = a \quad \text{et} \quad a \cdot 1 = a,$$

5. **élément absorbant** : pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$a \cdot 0 = 0.$$

Proposition 1.7. *On peut définir sur \mathbb{R} une relation d'ordre \leq qui prolonge la relation d'ordre sur \mathbb{N} et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. **réflexivité** : pour tout a dans \mathbb{R} on a

$$a \leq a,$$

2. **antisymétrie** : pour tous a, b dans \mathbb{R} ,

$$\text{si } a \leq b \quad \text{et} \quad b \leq a, \quad \text{alors } a = b,$$

3. **transitivité** : pour tous a, b, c dans \mathbb{R} ,

$$\text{si } a \leq b \quad \text{et} \quad b \leq c, \quad \text{alors } a \leq c,$$

4. **ordre total** : pour tous a, b dans \mathbb{R} ,

$$a \leq b \quad \text{ou} \quad b \leq a,$$

5. **compatibilité avec l'addition** : pour tous a, b, c dans \mathbb{R} ,

$$\text{si } a \leq b \quad \text{alors } a + c \leq b + c,$$

6. **compatibilité avec la multiplication** : pour tous a, b, c dans \mathbb{R} ,

$$\text{si } a \leq b \quad \text{et} \quad c \geq 0, \quad \text{alors } a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Remarque 1.8. *En mathématiques le « ou » est inclusif : « A ou B » signifie soit A , soit B , soit les deux.*

$a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b ». On écrit de plus, pour a, b dans \mathbb{R}

- $a \geq b$ (qui se lit « a supérieur ou égal à b ») si $b \leq a$,
- $a < b$ (qui se lit « a strictement inférieur à b ») si $a \leq b$ et $a \neq b$,
- $a > b$ (qui se lit « a strictement supérieur à b ») si $b < a$.

On remarque que le contraire de $a \leq b$ est $a > b$.

Remarque 1.9.

1. *On ne peut pas soustraire des inégalités : on a $2 \leq 3$ et $1 \leq 4$ mais $2 - 1 = 1$ n'est pas inférieur ou égal à $3 - 4 = -1$!*
2. *La multiplication par un réel négatif change le sens de l'inégalité : si a, b, c sont des réels,*

$$\text{si } a \leq b \quad \text{et} \quad c \leq 0, \quad \text{alors } a \cdot c \geq b \cdot c.$$

1.3 Valeur absolue

Définition 1.10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la **valeur absolue** de x , notée $|x|$, de la manière suivante :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Proposition 1.11. La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout a dans \mathbb{R} on a

$$|a| = |-a| = \sqrt{a^2} = \max(-a, a),$$

2. pour tout a dans \mathbb{R} on a

$$|a| = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad a = 0,$$

3. pour tous a, b dans \mathbb{R} on a

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$$

4. **inégalité triangulaire** : pour tous a, b dans \mathbb{R} on a

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

5. **inégalité triangulaire inverse** : pour tous a, b dans \mathbb{R} on a

$$|a - b| \geq ||a| - |b||.$$

Démonstration. Les trois premiers points sont des conséquences directes de la définition de la valeur absolue.

Démontrons le point 4. Considérons deux réels a et b . D'après 1) on a $|a + b| = \max(a + b, -a - b)$. Mais comme $a \leq \max(-a, a) = |a|$ et $b \leq |b|$ on a $a + b \leq |a| + |b|$. De même, comme $-a \leq |a|$ et $-b \leq |b|$ on a $-a - b \leq |a| + |b|$. Ainsi

$$|a + b| = \max(a + b, -a - b) \leq |a| + |b|.$$

Finalement démontrons le point 5). Considérons à nouveaux deux réels a et b . D'une part d'après 4) on a $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ et donc $|a - b| \geq |a| - |b|$. D'autre part on a $|b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$ et donc $|a - b| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|)$. On en déduit bien

$$|a - b| \geq \max(|a| - |b|, -(|a| - |b|)) = ||a| - |b||.$$

□

1.4 Intervalles

Intuitivement, un intervalle de \mathbb{R} est une partie de \mathbb{R} « sans trou ».

Définition 1.12 (Intervalles de \mathbb{R}). Soit I un sous-ensemble de \mathbb{R} . On dit que I est un intervalle de \mathbb{R} si, pour tous x, y éléments de I , tout réel z vérifiant $x \leq z \leq y$ est également un élément de I .

Proposition 1.13. Les intervalles I de \mathbb{R} ont l'une des formes suivantes :

1. \mathbb{R} ,
2. \emptyset , l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément,
3. $\{a\}$, un singleton, avec $a \in \mathbb{R}$,
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, un segment, avec a, b réels vérifiant $a < b$,
5. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ ou $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, avec a, b réels vérifiant $a < b$,
6. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$, $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ ou $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$, avec a réel.

Remarque 1.14. Dans les points 4., 5. et 6. de la proposition précédente les réels a et b sont appelés les **bords** de l'intervalle.

1.5 Majorant, minorant, borne inférieure, borne supérieure

Définition 1.15. Soit A une partie de \mathbb{R} et a un élément de A .

1. On dit que a est le **plus grand élément** de A (ou **maximum** de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \leq a$,
2. On dit que a est le **plus petit élément** de A (ou **minimum** de A) si et seulement si tout $b \in A$ vérifie $b \geq a$.

S'il existe, le plus grand élément de A est unique, on le note $\max(A)$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique, on le note $\min(A)$.

Exemples 1.16.

1. Une partie finie A de \mathbb{R} (c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathbb{R} formé d'un nombre fini d'éléments) a toujours un plus grand élément.
2. 1 est le plus grand élément de $[0, 1]$.
3. \mathbb{N} et $[0, 1[$ n'admettent pas de plus grand élément.

Définition 1.17. Soit A une partie de \mathbb{R} et m un réel.

1. On dit que m est un **majorant** de A si tout élément a de A vérifie $m \geq a$.
2. On dit que m est un **minorant** de A si tout élément a de A vérifie $m \leq a$.

Exemples 1.18.

1. 1 et 4 sont des majorants de $[0, 1]$ et $[0, 1[$,
2. \mathbb{N} n'a pas de majorant.

Définition 1.19. On dit qu'une partie A de \mathbb{R} est

1. **majorée** si elle admet un majorant,
2. **minorée** si elle admet un minorant,
3. **bornée** si elle admet un majorant et un minorant.

Exemples 1.20.

1. $[0, 1]$ et $[0, 1[$ sont bornés,
2. $[0, +\infty[$ est minoré mais n'est pas borné.

On admet le théorème suivant.

Théorème 1.21 (Théorème de la borne supérieure). Toute partie A de \mathbb{R} non-vide et majorée admet un plus petit majorant, appelé la **borne supérieure** de A et noté $\sup(A)$.

Exemple 1.22. On a $\sup([0, 1]) = \sup([0, 1]) = 1$.

Remarque 1.23. Ce théorème n'est pas vrai dans \mathbb{Q} : l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$ est majoré mais n'admet pas de plus petit majorant dans \mathbb{Q} .

De même, si A est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée, alors elle admet un plus grand minorant, appelée **borne inférieure** de A et noté $\inf(A)$.

Par convention, si A n'est pas majorée on note $\sup(A) = +\infty$ et si A n'est pas minorée on note $\inf(A) = -\infty$.

La proposition suivante permet de caractériser la borne supérieure dans \mathbb{R} .

Proposition 1.24 (Caractérisation de la borne supérieure). Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} et M un majorant de A . Alors $M = \sup(A)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble $A \cap]M - \varepsilon, M]$ ¹ est non vide.

1. Pour deux ensembles A et B , $A \cap B$ est l'ensemble formé des éléments qui sont à la fois dans A et B .

Bibliographie

- [1] Cours de première année disponible en ligne sur le site https://les-mathematiques.net/serveur_cours/section/2/
- [2] J.P. Ramis, A Warusfel, X. Buff, J Garnier, E. Halberstadt, F. Moulin, M. Ramis, J. Sauloy, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence 1*, Dunod, 3ème édition, 2018.
- [3] Notes de cours d'analyse 1 pour Informaticiens de Guillaume Aubrun.