Feuille 1 : Nombres réels

Exercice 1 : (Automatismes - Puissances). Pour x et y des réels non nuls, et a et b des entiers, donner une autre écriture des expressions suivantes :

1. $(x^a)^b$
2. x^{a+b}
3. $(x \times y)^a$

Exercice 2 : (Automatismes - Simplifications). Simplifier et calculer les expressions suivantes.

1. $2^3 \times 2^2$
2. $5^3 \cdot 5^{-4}$
3. $\dfrac{3^2}{3^5}$
4. $\left(7^5\right)^3$
5. $\left(2^3\right)^{-2}$
6. $\dfrac{8^3}{4^3}$
7. $\dfrac{5^2 \times 10^3}{2^6}$
8. $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
9. $\dfrac{\sqrt{10}\,\sqrt{42}}{\sqrt{35}\,\sqrt{6}}$

Exercice 3 : (Automatismes - Simplification d'expressions). Soit x et y des réels ; en supposant qu'elle est bien définie, fournir une forme plus simple de chacune des expressions suivantes :

1. $(5x)^3$
2. $(-1)^{2001}$
3. $(-2y)^4$
4. $(4^2)^{\frac{1}{4}}$
5. $(125)^{-2/3}$
6. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$
7. $\left(\dfrac{x^{-2}}{y^{-2}}\right)\left(\dfrac{x}{y}\right)^2$
8. $-2\sqrt{9y} + 10\sqrt{y}$
9. $\left[\left(x^2 y^{-2}\right)^{-1}\right]^{-1}$
10. $5^{-1/2} \cdot 5x^{11/6} \cdot (5x)^{-3/2}$

Exercice 4 : (Automatismes - Inégalités). Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $7x + 9 > 0$
2. $-3x \geq 2$
3. $10x - 1 \leq 5$
4. $-7x - 2 > 0$
5. $11x + 9 \leq -4$
6. $-3x - 2 \geq 7$

Exercice 5 : (Inégalités). Vrai ? Faux ? Justifier !

1. Soient x et y deux réels. Si $x + y \leq 7$ et $x \leq 3$ alors $y \leq 4$.
2. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, -1] \times [2, 4]$, on a $xy \geq -4$.
3. Pour tout couple $(x, y) \in [-2, 7] \times [-4, 1]$, on a $-28 \leq xy \leq 8$.

Exercice 6 : (Signe du trinôme). Résoudre les inéquations suivantes pour x réel :

1. $x^2 - 2x + 1 \geq 0$
2. $x^2 - 2x + 1 > 0$
3. $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
4. $-x^2 + 5x + 14 > 0$
5. $-x^2 - 10x - 25 > 0$
6. $-x^2 + 14x - 49 < 0$

Exercice 7 :

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $-3x + 4 \geq x - 3$.
2. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^2 - 4x - 2 \geq 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $(x + 2)^2 < -x$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^3 - 6x \geq x^2$.

Exercice 8 :

1. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{6}\}$ qui vérifient $\dfrac{-2}{6x + 5} > 1$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -\frac{2}{3}\}$ qui vérifient $\dfrac{1}{x - 2} < \dfrac{2}{3x + 2}$.

Exercice 9 : Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|2-x| \leq 3-x$.

Exercice 10 : Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

Exercice 11 : Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $|1-x^4| \leq 4|1-x|$.

Exercice 12 : Pour x réel, on note $f(x) = |2-|1-x||$. Exprimer $f(x)$ sans utiliser de valeur absolue en discutant selon la position de x sur l'axe réel, et tracer le graphe de f.

Exercice 13 : Expliciter trois réels a, b et c tels que pour tout réel x on ait :

$$x^3 - x^2 + 2x + 4 = (x+1)(ax^2+bx+c)$$

puis en déduire l'ensemble des x réels pour lesquels $x^3 - x^2 + 2x + 4 > |x+1|$.

Exercice 14 : (Inéquations et équations).

1. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $x^4 - 13x^2 + 36 \leq 0$.
2. Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R} - \{-1,3\}$ qui vérifient $\frac{x-6}{3-x} < \frac{x+6}{x+1}$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-3| + |x-7| = 4$.
4. Déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient $|x-1| + |x-2| < 1$.

Exercice 15 :

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $A = \frac{a^4 - 7a^2 + 4}{3}$ et $B = \frac{a^4 - 9a^2 + 5}{4}$. Montrer que l'un de ces deux nombres (on précisera lequel) est toujours plus grand que l'autre.
2. Soit m et n deux réels. Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère les réels $C = \frac{a^4 + ma^2 + 2}{3}$ et $D = \frac{a^4 + na^2 + 3}{4}$. Montrer que le signe de $D - C$ n'est pas constant quand a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : (Moyennes). Soit x et y deux réels tels que $0 < x \leq y$. On pose :

$$m = \frac{x+y}{2}, \qquad g = \sqrt{xy}, \qquad h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer la chaîne d'inégalités : $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

1. Montrer que $m \leq y$.
2. Montrer que $g \leq m$.
3. Montrer que $x \leq h$. (Indication : on pourra chercher à comparer $1/x$ et $1/h$).
4. Montrer que $h \leq g$.

Exercice 17 : (Simplification d'intervalles) Simplifier les intervalles suivants.

1. $[1,5] \cap [2,6[$;
2. $[1,5] \cup [2,6[$;
3. $]-\infty,3] \cap [0,+\infty[$;
4. $]-\infty,3] \cup [0,+\infty[$;
5. $[-2,3[\cup \{3\}$;
6. $[-2,3[\cap \{3\}$;
7. $[1,2] \cap [5,6[$;
8. $[1,2] \cup [5,6[$;
9. $([-6,8] \cup [4,6[) \cap [7,10[$;

Exercice 18 : (Intervalles). Soient $a \leq b$ et $c \leq d$ des réels. On note $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$.

1. Montrer que $I \cap J$ est toujours un intervalle.
2. Sous quelle condition $I \cup J$ est-il un intervalle ?
3. Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que $A \cap B$ soit un intervalle, sans que ni A, ni B ne soient un intervalle. Même question pour $A \cup B$.

Exercice 19 : (Majorant).

1. Rappeler la définition d'une partie A majorée de $\mathbb{R}$.
2. Quels sont les majorants de $[0,1]$? De $[0,1[$?

3. Donner un exemple de partie non majorée de $\mathbb{R}$.
4. On se donne deux parties majorées A et B de $\mathbb{R}$. Le majorant de $A \cup B$ est-il un majorant de A et de B ? Que peut-on dire d'un majorant de $A \cap B$?

Exercice 20 : (Maximum).

1. Rappeler la définition du maximum d'une partie de $\mathbb{R}$.
2. Une partie de $\mathbb{R}$ peut-elle admettre plusieurs maximums (distincts) ?
3. Montrer que toute partie A de $\mathbb{R}$ admettant un maximum est majorée.
4. Écrire une assertion exprimant qu'une partie A de $\mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.
5. Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ admettant un maximum, est-ce que $A \cap B$ et $A \cup B$ admettent des maximums ?

Exercice 21 : (Majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure, maximum, minimum). Pour les ensembles suivants, dire s'ils sont majorés, minorés, et s'ils admettent une borne supérieure, une borne inférieure, un maximum et un minimum.

1. $A = \{4, -5, 10, -9, 21, 0, -3\}$;
2. $B = [-1, 3]$;
3. $C = [0, +\infty[$;
4. $D =]0, +\infty[$;
5. $E = \{x \in \mathbb{R},\, x^2 < 4\}$;
6. $F = \{n \in \mathbb{N},\, 4 \leq 2^n \leq 1024\}$;
7. $G = \left\{x \in \mathbb{R}^*,\, \dfrac{1}{x} \geq 2\right\}$;
8. $H = \left\{\dfrac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.