La formule de Taylor-Lagrange

Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,x])$ tel que f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,x[$. Alors il y a $c \in]a,x[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration : On pose

$$g(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) - A\frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

où l'on choisit A tel que $g(a) = 0$. Alors

$$A\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

On note que

$$g(x) = f(x) - \frac{(x-x)^0}{0!} f^{(0)}(x) + 0 = 0,$$

et

$$\begin{aligned} g'(y) &= -f'(y) - \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{-k(x-y)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k+1)}(y) \right] - A\frac{-(n+1)(x-y)^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{(x-y)^n}{n!} f^{(n+1)}(y) + A\frac{(x-y)^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Rolle il y a $c \in]a,x[$ tel que

$$0 = g'(c) = -\frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A\frac{(x-c)^n}{n!}.$$

Ainsi $A = f^{(n+1)}(c)$, et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + A\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(y) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \quad \square$$