

Feuille d'exercices n° 3

FONCTIONS USUELLES

1 LOGARITHME

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0$

b) $\log_{10}(x + 2) - \log_{10}(x + 1) = \log_{10}(x - 1)$

Solutions :

a) On remarque d'abord que l'équation n'a de sens que si $x > 1$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. En passant à l'exponentielle, on obtient que $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^2 - 1) = 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 1 = 0$.

Or on sait que l'équation $2x^2 - 2x - 1 = 0$ a pour solutions $\frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. En faisant l'intersection avec le domaine de validité de l'équation, à savoir $]1, +\infty[$, on déduit que l'unique solution de l'équation est $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

b) En faisant de même que ci-dessus, on trouve que l'unique solution de l'équation est $\frac{1 + \sqrt{13}}{2}$.

Exercice 2. Quel est le nombre de chiffres en base 10 du nombre $2^{43112609}$?

Solutions :

$\log_{10}(2^{43112609}) = 43112609 \times \log_{10}(2)$ a 12978188 comme partie entière inférieure. Il s'agit du nombre de chiffres en base 10.

Exercice 3. Y a-t-il un point du graphe du logarithme népérien tel que la tangente au graphe en ce point passe par l'origine ?

Solutions : Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que la tangente au graphe du logarithme népérien en x_0 passe par l'origine. La tangente au graphe du logarithme népérien en x_0 est donnée par $x \mapsto \ln(x_0) + \frac{x - x_0}{x_0}$. Cette tangente passe en l'origine ssi $\ln(x_0) - \frac{x_0}{x_0} = 0$ ssi $x_0 = e$. Donc seul le point $(e, 1)$ vérifie la condition requise.

Exercice 4. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Solutions :

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - x + x^2/2$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$. Donc f est croissante. Or $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$.

L'autre inégalité se montre de la même façon.

Exercice 5. Démontrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

Solutions :

Supposons par l'absurde qu'il existe p et q deux entiers tels que $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$. Alors $2^q = 10^p = 2^p \times 5^p$.

L'unicité de la décomposition en facteurs premiers nous donne que $q = p$ et $p = 0$. Cela est absurde.

Exercice 6. Montrer que l'équation

$$\ln(1+|x|) = \frac{1}{x-1}$$

possède exactement une solution $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Solutions :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+|x|) \geq \ln(1) = 0$. Or $\frac{1}{x-1}$ est négatif tant que $x < 1$. Donc l'équation n'a aucune solution sur $] -\infty, 1[$.

On pose $f : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{1}{x-1}$ définie sur $]1, +\infty[$.

Pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(x-1)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$. De plus les limites de f en 1^+ et $+\infty$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$.

Par conséquent le théorème de la bijection nous dit qu'il existe un unique α solution de l'équation dans $]1, +\infty[$. De plus $f(2) = \ln(3) - 1 > 0$ donc on sait en plus que $\alpha < 2$.

Exercice 7. Déterminer les entiers naturels n tels que $2^n \geq n^2$.

Solutions : On pose $f : x \mapsto \ln(2)x - 2 \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \ln(2) - \frac{2}{x}$.

On en déduit aisément que f est strictement décroissante puis strictement croissante.

De plus $f(2) = 0$ et $f(4) = 0$. Donc f est positive sur $]0, 2]$, négative sur $[2, 4]$ et positive sur $[4, +\infty[$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq n^2$ ssi $f(n) \geq 0$. Donc $2^n \geq n^2$ pour tout entier n différent de 3.

2 Exponentielle

Exercice 8. Etudier la parité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^x - e^{-x}$

b) $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

c) $h(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

Solutions :

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x)$. Donc f est impaire.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -g(x)$. Donc g est impaire.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(-x) = \frac{e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} = \frac{e^{2x} \times e^{-x}}{e^{2x} \times (e^{-x} + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = h(x)$. Donc h est paire.

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

b) $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0$

c) $e^{5x} + e^{3x} + e^x = 0$

Solutions :

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} - e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x$ est solution de l'équation $X^2 - X - 6$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $e^{2x} - e^x - 6 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3$ ou $e^x = -2 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 20e^x - 7 = 0 \Leftrightarrow e^x$ est solution de l'équation $3X^2 - 20X - 7$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $3e^x - 7e^{-x} - 20 = 0 \Leftrightarrow e^x = 7$ ou $e^x = -1/3 \Leftrightarrow e^x = 7 \Leftrightarrow x = \ln(7)$.

c) L'équation $e^{5x} + e^{3x} + e^x = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ n'a pas de solution car une somme de nombres strictement positifs ne peut pas être nulle.

Exercice 10. Déterminer la limite en $+\infty$ des expressions suivantes :

a) $\ln(x) - e^x$

b) $\frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})}$

c) $\frac{\ln(1 + e^x)}{\sqrt{x}}$

d) $\frac{\exp(\sqrt{x}) + 1}{\exp(x^2) + 1}$

Solutions :

a) $\ln(x) - e^x = e^x \left(\frac{\ln(x)}{e^x} - 1 \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

b) $\sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\frac{x^6}{\exp(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc par composition des limites $\frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

c) $\frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(e^x(1+e^{-x}))}{\sqrt{x}} = \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\ln(1+e^{-x})}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

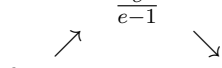
d) $\frac{\exp(\sqrt{x}) + 1}{\exp(x^2) + 1} = \frac{\exp(\sqrt{x-x^2}) + \exp(-x^2)}{1 + \exp(-x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{0+0}{1+0} = 0$.

Exercice 11.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x$.
2. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{e^x}{e^x - x}$.
 - (a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Calculer, si elles existent, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Rappel : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.
 - (c) Dresser le tableau de variations de f .
 - (d) En déduire que f atteint un maximum sur $\mathbb{R}$ puis le déterminer.

Solutions :

1. On pose $f : x \mapsto e^x - x - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x - 1$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. Or $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x > x$.
2.
 - (a) On note que $x \mapsto e^x$ est continue. En outre, $x \mapsto e^x - x$ est continue et ne s'annule pas. Donc le quotient de ces deux fonctions noté f est bien défini et continu.
 - (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$. On sait que $xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
 Par ailleurs $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{0 - \infty} = 0$.
 - (c) Un rapide calcul donne que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1	
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	$\frac{e}{e-1}$ 	
	0	1

- (d) On déduit du tableau de variation que f atteint un maximum en 1 et que ce maximum vaut $\frac{e}{e-1}$.

3 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 12. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos(3x) \cos^3(x)$$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x + \pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Calculer f' et déduire le sens de variation de f sur I .
3. Tracer le graphe de f .

Solutions :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$f(-x) = \cos(-3x) \cos^3(-x) = \cos(3x) \cos^3(x) = f(x)$. Donc f est paire.

$f(x + \pi) = \cos(3x + 3\pi) \cos^3(x + \pi) = -\cos(3x) \times (-1)^3 \times \cos^3(x) = f(x)$. Donc f est π périodique.

Comme f est π périodique, on peut se contenter de l'étudier sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. De plus, comme f est paire, on peut même se contenter de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin(3x) \cos^3(x) - 3 \cos(3x) \sin(x) \cos^2(x) \\ &= -3 \cos^2(x) (\sin(3x) \cos(x) + \sin(x) \cos(3x)) \\ &= -3 \cos^2(x) \sin(4x) \end{aligned}$$

Donc f' est négative sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et positive sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que f est décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et croissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

- 3.

Exercice 13. Déterminer la valeur de

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| a) $\arcsin(-1/2)$ | b) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ | c) $\arctan(\sqrt{3})$ |
| d) $\arccos(\cos(2\pi/3))$ | e) $\arccos(\cos(-2\pi/3))$ | f) $\arccos(\cos(4\pi/3))$. |

Solutions :

- | | | |
|---|--|---|
| a) $\arcsin(-1/2) = -\frac{\pi}{6}$ | b) $\arccos(-\sqrt{2}/2) = \frac{3\pi}{4}$ | c) $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ |
| d) $\arccos(\cos(2\pi/3)) = \frac{2\pi}{3}$ | e) $\arccos(\cos(-2\pi/3)) = \frac{2\pi}{3}$ | f) $\arccos(\cos(4\pi/3)) = \frac{2\pi}{3}$ |

Exercice 14. Donner le domaine de définition maximal des équations suivantes puis les résoudre :

- | | | |
|--------------------|----------------------------|---------------------------------|
| a) $\sin^2(x) = 1$ | b) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ | c) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$ |
|--------------------|----------------------------|---------------------------------|

Solutions :

- a) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 1$ ou $\sin(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- b) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(x) = 1/2 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.
- c) L'équation est définie sur $[-1, 1]$. Son unique solution est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 15.

- Tracer le graphe des fonctions $\arcsin \circ \sin$ et $\sin \circ \arcsin$.
- Donner le domaine de définition maximal des expressions suivantes puis simplifier les :

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------|
| a) $\tan(\arcsin x)$ | b) $\sin(\arccos x)$ | c) $\cos(\arctan x)$. |
|----------------------|----------------------|------------------------|

Solutions :

1.

Voici $\arcsin \circ \sin$.

Voici $\sin \circ \arcsin$.

2.

- a) Le domaine de définition maximal de cette fonction est $] -1, 1[$.
Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- b) Le domaine de définition maximal de cette fonction est $[-1, 1]$.
Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}$.

c) Le domaine de définition maximal de cette fonction est $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \cos(\arctan(x))$. On remarque d'abord que $X > 0$.

De plus, $\frac{\sqrt{1-X^2}}{X} = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))} = \tan(\arctan(x)) = x$.

Donc $1 - X^2 = X^2 x^2$. Donc $X = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Solutions :

On pose $f : x \mapsto \arccos(x) + \arcsin(x)$ définie sur $[0, 1]$.

Pour tout $x \in [0, 1[$, $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.

Donc f est constante sur $[0, 1[$. Par continuité, elle est constante sur $[0, 1]$. Or $f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$. Cela conclut.

Exercice 17. Soit $p \in \mathbb{N}$.

1. Prouver que $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$
2. Déterminer la limite de la suite

$$S_n = \sum_{p=0}^n \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)$$

Solutions :

1. On note que $\arctan(p+1) - \arctan(p) \in]-\pi/2, \pi/2[$.

Par conséquent, par une formule de trigonométrie usuelle pour $\tan$:

$$\begin{aligned} \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) &\Leftrightarrow \tan[\arctan(p+1) - \arctan(p)] = \tan\left[\arctan\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right)\right] \\ &\Leftrightarrow \frac{p+1-p}{1+p(p+1)} = \frac{1}{p^2+p+1} \\ &\Leftrightarrow \textbf{Vrai} \end{aligned}$$

2. Par télescopage, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{p=0}^n \arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan(n+1) - \arctan(0) = \arctan(n+1)$.

$$\text{Donc } S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 18. Donner le domaine de définition maximal des fonctions suivantes. Puis, donner leur domaine de dérivabilité et calculer leur dérivée.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{\arcsin(x)} \qquad \text{b) } g(x) = \arcsin(\cos(x)) \qquad \text{c) } h(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

Solutions :

- a) $\arcsin$ est négative sur $[-1, 0]$ et positive sur $[0, 1]$. Donc f est définie maximale sur $[0, 1]$.

En 0, la racine carrée n'est pas dérivable en 0. De plus $\arcsin$ n'est pas dérivable en 1. On suspecte donc que le domaine de dérivabilité de f est $]0, 1[$. (Mais attention cela ne suffit pas comme argument ! Il existe des contre-exemples !)

Rappelons le théorème suivant (qui peut se montrer en utilisant le théorème des accroissements finis). Soit g une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et soit $a \in I$. On suppose

1. g continue sur I ,
2. g dérivable sur $I \setminus \{a\}$,
3. $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \ell.$$

En particulier, si g est dérivable en a si et seulement si $\ell \in \mathbb{R}$, et on a alors $g'(a) = \ell$.

$$\text{Pour tout } x \in]0, 1[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2) \times \arcsin(x)}}.$$

On voit que f' diverge en 0 et en 1, par conséquent $]0, 1[$ est bien le domaine de dérivabilité de f .

b) g est définie sur $\mathbb{R}$.

On note que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(x))$. Il s'agit donc d'une fonction "triangulaire" dérivable partout sauf sur $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $g'(x) = \frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)^2}} = -\operatorname{sgn}(\sin(x))$.

c) h est définie maximale sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, h'(x) = \frac{2(1-x^2)+2x \times 2x}{(1-x^2)^2} \times \frac{1}{1+\frac{(2x)^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1-x)^2+4x^2} = \frac{2}{1+x^2}.$$

On notera qu'on a ici une situation très particulière car même si h n'est pas définie en -1 et 1 , h' l'est. En vérité h admet une limite à gauche et à droite en ces deux points et ses prolongements à gauche et à droite sont dérivables et les dérivées à gauche et à droite en ces points coïncident ! Toutefois h n'est pas prolongeable par continuité ! Voici le graphe de h pour bien visualiser la chose :

4 FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES HYPERBOLIQUES

Exercice 19. Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

Solutions :

$$\begin{aligned} \cosh(x) = 2 &\Leftrightarrow e^x + e^{-x} = 4 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \text{ est solution de l'équation } X^2 - 4X + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \in \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\} \\ &\Leftrightarrow x \in \{\ln(2 + \sqrt{3}), \ln(2 - \sqrt{3})\} \end{aligned}$$

Exercice 20. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \sinh(1/x)$.

1. Etudier la parité de f .
2. Etudier le comportement de f en $\pm\infty$ et en 0 .
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
4. Justifier que pour tout $y \geq 0$ on a $\tanh(y) \leq y$. En déduire le tableau de variations de f et tracer son graphe.

Solutions :

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = -x \sinh(-1/x) = x \sinh(1/x) = f(x)$. Cela est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Donc f est paire.
2. On note que $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc par composition des limites, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Par parité de f , il en va de même en 0^- .
De plus on remarque que $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{(e^{-x} - 1)}{x} \right] \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$. Donc par composition des limites, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Il en va de même en $-\infty$ par parité.
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \sinh(1/x) - \frac{\cosh(1/x)}{x}$.
4. On pose $\varphi : x \mapsto \tanh(x) - x$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{\cosh(x)^2} - 1 \leq 0$. Donc φ décroît donc pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, $\tanh(y) - y = \varphi(y) \leq \varphi(0) = 0$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = \cosh(1/x) (\tanh(1/x) - 1/x) \leq 0$. Donc f croît sur $\mathbb{R}^{-*}$ et décroît sur

$\mathbb{R}^{+*}$.

Voici le graphe de f :

Exercice 21. Déterminer les couples de réels (a, b) tels que le système suivant admette une solution :

$$\begin{cases} \cosh(x) + \cosh(y) &= a \\ \sinh(x) + \sinh(y) &= b \end{cases}$$

Solutions : On va procéder par analyse synthèse. Soit (a, b) un couple de réel tel que le système ci-dessus ait une solution (x, y) . Alors en sommant et en soustrayant les deux équations, il vient :

$$\begin{cases} e^x + e^y &= a + b \\ e^{-x} + e^{-y} &= a - b \end{cases}$$

En particulier $a + b > 0$ et $a - b > 0$.

On pose $X = e^x$ et $Y = e^y$. On a alors :

$$\begin{cases} X + Y &= a + b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} &= a - b \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} X + Y &= a + b \\ XY &= \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Donc X et Y sont racines du polynôme $T^2 - (a + b)T + \frac{a+b}{a-b}$. Par conséquent le discriminant de ce polynôme est positif. Donc $(a + b)^2 - 4(a + b)/(a - b) \geq 0$ c'est-à-dire, $a^2 - b^2 \geq 4$. Finalement on a les conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{cases} a + b &> 0 \\ a - b &> 0 \\ a^2 - b^2 &\geq 4 \end{cases}$$

Montrons réciproquement que ces conditions sont suffisantes.

Le polynôme $T^2 - (a + b)T + \frac{a+b}{a-b}$ admet alors deux racines réelles X et Y . Par les relations coefficients-racines, elles vérifient les équations :

$$\begin{cases} X + Y &= a + b \\ XY &= \frac{a+b}{a-b} \end{cases}$$

Par ailleurs, notons que $T^2 - (a + b)T + \frac{a+b}{a-b}$ n'admet que des racines strictement positives donc $X > 0$ et $Y > 0$. Donc on a de nouveau que :

$$\begin{cases} X + Y &= a + b \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} &= a - b \end{cases}$$

En posant $x = \ln(X)$ et $y = \ln(Y)$ on retrouve alors aisément l'équation voulue.

Exercice 22. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \right)^n = \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)}$$

Solutions :

Soit $x \in \mathbb{R}$. On va procéder par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \right)^n = \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)}$.

-Initialisation : Le cas $n = 1$ revient à écrire la même chose des deux côtés de l'équation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n soit vraie.

-Hérédité : Par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \right)^{n+1} &= \left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \right) \times \left(\frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \right)^n \\ &= \frac{1 + \tanh(x)}{1 - \tanh(x)} \times \frac{1 + \tanh(nx)}{1 - \tanh(nx)} \\ &= \frac{1 + \tanh(x) + \tanh(nx) + \tanh(x) \tanh(nx)}{1 - \tanh(x) - \tanh(nx) + \tanh(x) \tanh(nx)} \end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned} \frac{1 + \tanh((n+1)x)}{1 - \tanh((n+1)x)} &= \frac{1 + \frac{\tanh(x) + \tanh(nx)}{1 + \tanh(nx) \tanh(x)}}{1 - \frac{\tanh(x) + \tanh(nx)}{1 + \tanh(nx) \tanh(x)}} \\ &= \frac{1 + \tanh(x) + \tanh(nx) + \tanh(x) \tanh(nx)}{1 - \tanh(x) - \tanh(nx) + \tanh(x) \tanh(nx)} \end{aligned}$$

Le principe de récurrence permet de conclure.