Mathématiques - DS n°4 CUPGE

Corrigé

Exercice 1 : Les complexes.

1. Montrer que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{U}$.
2. Résoudre le système d'inconnues $x+y = 5+i$ et $xy = 8+i$.
3. Caractériser géométriquement l'application complexe $f(z) = (1+i\sqrt{3})z + (1-i)$.

Solution

1. On a $u\bar{u} = 1$ pour tout $u \in \mathbb{U}$. Donc :

$$\begin{aligned}|ab+bc+ca|^2 &= (ab+bc+ca)\overline{(ab+bc+ca)} = (ab+bc+ca)(\bar{a}\bar{b}+\bar{b}\bar{c}+\bar{c}\bar{a})\\ &= ab\bar{a}\bar{b} + ab\bar{b}\bar{c} + ab\bar{c}\bar{a} + bc\bar{a}\bar{b} + bc\bar{b}\bar{c} + bc\bar{c}\bar{a} + ca\bar{a}\bar{b} + ca\bar{b}\bar{c} + ca\bar{c}\bar{a}\\ &= a\bar{a} + a\bar{c} + b\bar{c} + c\bar{a} + b\bar{b} + b\bar{a} + c\bar{b} + c\bar{c}\\ &= (a+b+c)(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}) = (a+b+c)\overline{(a+b+c)} = |a+b+c|^2.\end{aligned}$$

   Puisque $|z| = \sqrt{|z|^2}$, le résultat en découle.

2. D'après la relation racines-coefficients, x et y sont les deux solutions de l'équation

$$z^2 - (5+i)z + 8 + i = 0.$$

   Le déterminant est $\Delta = (5+i)^2 - 4\,(8+i) = 25 - 1 + 10i - 32 - 4i = -8 + 6i$. Soit $\delta = a + ib$ avec $\Delta = \delta^2 = a^2 - b^2 + 2abi$. Alors $a^2 - b^2 = -8$, $2ab = 6$ et $a^2 + b^2 = |\Delta| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10$. Ainsi $2a^2 = -8 + 10 = 2$ et $a = \pm 1$, ce qui donne $b = 3/a = \pm 3$ et $\delta = \pm(1+3i)$. Donc

$$\{x, y\} = \{\frac{5+i\pm(1+3i)}{2}\} = \{3+2i, 2-i\}.$$

3. On a $1 + i\sqrt{3} \neq 1$. Il s'agit donc d'une homothétie-rotation d'angle $\arg(1+i\sqrt{3}) = \pi/3$, de rapport $|1+i\sqrt{3}| = 2$ et de centre le point fixe de f. Ainsi l'affixe z_0 est donné par

$$z_0 = f(z_0) = (1+i\sqrt{3})z_0 + (1-i),$$

   soit $z_0 = \frac{1}{i\sqrt{3}}(i-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1+i)$.

Exercice 2 : Arithmétique.

1. (a) Enoncer le petit théorème de Fermat.
   (b) En déduire que si p est premier et $n, k \in \mathbb{N}^\times$ avec $n \equiv 1 \mod p^k$ alors $n^p \equiv 1 \mod p^{k+1}$.
   (c) En déduire que si p est premier, alors pour tous $n \in \mathbb{N}$ premier à p on a $n^{p^{k-1}(p-1)} \equiv 1 \mod p^k$.
2. Donner toutes les solutions de l'équation diophantienne $40x - 106y = 6$.

Solution

1. (a) Soit p premier. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on a $n^p \equiv n \mod p$. Si $p \nmid n$, alors $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
   (b) On a $n^p - 1 = (n-1)(1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-1})$. Or, $p^k \mid n-1$ par hypothèse, ce qui implique $n \equiv 1 \mod p$, et donc

$$1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-1} \equiv 1 + \cdots + 1 = p \equiv 0 \mod p.$$

   Ainsi $p \mid 1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-1}$, et $p^{k+1} \mid (n-1)(1 + n + n^2 + \cdots + n^{p-1}) = n^p - 1$. Donc $n^p \equiv 1 \mod p^{k+1}$.
   (c) D'après (a) on a $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Alors (b) nous donne $(p^{(p-1)p} \equiv 1 \mod p^2$, puis $(p^{(p-1)p^2} \equiv 1 \mod p^3$, etc., jusqu'à $(n^{p-1})^{p^k} \equiv 1 \mod p^{k+1}$.

2. On a $40x - 106y = 6$ ssi $20x - 53y = 3$. On calcule le pgcd : $53 = 20 \cdot 2 + 13$, $20 = 13 + 7$, $13 = 7 + 6$ et $7 = 6 + 1$. Ainsi $53 \wedge 20 = 1 \mid 3$ et il y a une solution. En remontant on trouve $1 = 20 \cdot 8 - 53 \cdot 3$. Une solution particulière est donc $(x_0, y_0) = (24, 9)$.
   (x, y) est une autre solution ssi $20(x - x_0) - 53(y - y_0) = 0$. Donc $20 \mid 53(y - y_0)$; puisque $20 \wedge 53 = 1$ the lemme de Gauss implique $20 \mid y - y_0$, et il y a $k \in \mathbb{Z}$ avec $y - y_0 = 20k$, d'où $y = y_0 + 20k = 9 + 20k$. Alors $x = x_0 + \frac{53}{20}(y - y_0) = 24 + 53k$. On vérifie aisément que (x, y) est une solution. L'ensemble des solutions est donc $\{(24 + 53k, 9 + 20k) : k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3 : Continuité.

1. Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.
   (a) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$ alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $h \restriction_D$ est strictement croissante, alors h aussi.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective.
   (a) Montrer que $f \restriction [0, x]$ possède un maximum a_x et un minimum b_x pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. (Il suffit d'appliquer correctement un théorème du cours.)
   (b) Si $f(x) = a$ pour un $a \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $x' > x$ avec $f(x') = a$.
   (Indication : Considérer $y, y' \in \mathbb{R}$ avec $f(y) = a_x + 1$ et $f(y') = b_x - 1$, et étudier le comportement de f entre y et y'.)
   (c) En déduire que $f^{-1}[\{a\}]$ est infini pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Solution

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque D est dense dans $\mathbb{R}$, pour tout entier $n > 0$ il y a $x_n \in \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[\cap D$. Alors $f(x_n) = g(x_n)$ pour tout $n > 0$, et $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ainsi par continuité de f et de g,
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$
   Donc $f = g$.
   (b) Soit $x < y$. Puisque D est dense dans $\mathbb{R}$ pour tout entier $n > 0$ il y a
$$x_n \in \left]x, x + \frac{y - x}{4n}\right[\cap D \qquad \text{et} \qquad y_n \in \left]y - \frac{y - x}{4n}, y\right[\cap D.$$
   Alors $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Par continuité de h on a
$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) \qquad \text{et} \qquad h(y) = \lim_{n\to\infty} h(y_n).$$
   De plus il y a
$$x_0 \in \left]x + \frac{y - x}{4}, \frac{x + y}{2}\right[\cap D \qquad \text{et} \qquad y_0 \in \left]\frac{x + 2}{2}, y - \frac{y - x}{4}\right[\cap D.$$
   Alors, $x_n < x_0 < y_0 < y_n$ pour tout $n > 0$; puisque $f \restriction D$ est strictement croissante, on a $h(x_n) < h(x_0) < h(y_0) < h(y_n)$, et donc
$$h(x) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) \leq h(x_0) < h(y_0) \leq \lim_{n\to\infty} h(y_n) = h(y).$$
   Ainsi h est strictement croissante.
2. (a) Théorème du maximum : Une fonction continue sur un intervalle fermé atteint un minimum et un maximum. On l'applique à f et l'intervalle $[0, x]$.
   (b) Soient $y, y' \in \mathbb{R}$ avec $f(y) = a_x + 1$ et $f(y') = b_x - 1$, ce qui existe par surjectivité de f. Alors $y, y' \notin [0, x]$ par définition de a_x et b_x. Ainsi $y, y' > x$. Or, d'après le TVI entre y et y' la fonction f atteint tous les valeurs dans $[b_x - 1, a_x + 1]$, notamment a. Il y a donc $x' \geq \min\{y, y'\} > x$ avec $f(x') = a$.
   (c) Si $f^{-1}[\{a\}]$ était fini, il y aurait un x maximal avec $f(x) = a$, ce qui contredit (b). Donc $f^{-1}[\{a\}]$ est infini.

Exercice 4 : Dérivabilité.

1. (a) Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que si f' possède une limite finite en a, alors f est prolongeable en une fonction dérivable sur $[a,b]$ dont la dérivée est continue en a.
(Attention : Il manque une hypothèse pour appliquer le théorème de la prolongation dérivable.)
(Indication : Montrer d'abord $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x,y \in\,]a,a+\delta],\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$.)
   (b) Donner un exemple d'une fonction dérivable $g : [-1,1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que g' possède une limite finie en 0 mais g n'est pas prolongeable en 0 par continuité.
2. Soit $h(x) = e^{x^2}$ de domaine $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$. Spécifier le degré de P_n.

Solution

1. (a) Il faut montrer que $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe. Dans ce cas tous les hypothèses du théorème de la continuation dérivable sont satisfaites, et ce théorème donne la conclusion recherchée.
Supposons que $\forall\, \epsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x,y \in\,]a,a+\delta],\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$ est faux, et soit $\epsilon > 0$ tel que pour tout $n > 0$ il y a $x_n, y_n \in\,]a, a+1/n]$ avec $|f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon$. D'après le TAF il y a c_n entre x_n et y_n avec $f'(c_n) = (f(x_n) - f(y_n))/(x_n - y_n)$. Alors $\lim_{n\to\infty} c_n = a$, mais
$$|f'(c_n)| = \left|\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - x_n}\right| \geq \frac{\epsilon}{1/n} \to \infty$$
quand $n \to \infty$, ce qui contredit $\lim_{x\to a} f'(x) \in \mathbb{R}$.
Donc pour tout $\epsilon > 0$ il y a $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in\,]a, a+\delta]$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. On prend le δ qui correspond à $\epsilon = 1$. Alors pour tout $x \in\,]a, a+\delta]$ on a $f(a+\delta) - 1 \leq f(x) \leq f(a+\delta)$. Soit $(x_n)_n$ une suite dans $]a, a+\delta]$ qui converge vers a. Alors la suite $(f(x_n))_n$ est bornée ; d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass elle possède une suite extraite convergente vers un $\ell \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer $(x_n)_n$ par cette suite extraite, on peut supposer que $(f(x_n)_n$ converge vers ℓ.
Maintenant soit $\epsilon > 0$ quelconque, et $\delta > 0$ qui correspond à $\epsilon/2$. Alors pour tout $x \in\,]a, a+\delta]$ il y a $x_n \in\,]a, a+\delta]$ avec $|f(x_n) - \ell| \leq \epsilon/2$, et
$$|f(x) - \ell| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - \ell| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$
Ainsi $\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$.
   (b) On prend $f : [-1,1] \setminus \{0\}$ défini par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. Alors $f' = 0$ dans le domaine, mais f n'est pas prolongeable en 0.
2. On calcule $f'(x) = 2xe^{x^2}$ et $f''(x) = 2e^{x^2} + (2x)^2 e^{x^2} = (4x^2+2)e^{x^2}$. Donc $P_0 = 1$, $P_1 = 2x$ et $P_2 = 4x^2 + 2$. On construit les P_n par récurrence, avec $\deg(P_n) = n$. L'initialisation est déjà faite. Donc on suppose que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. Alors
$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (P_n(x)e^{x^2})' = P_n'(x)e^{x^2} + P_n(x)2xe^{x^2} = P_{n+1}(x)e^{x^2}$$
avec $P_{n+1}(X) = P_n'(X) + 2X\, P_n(X) \in \mathbb{R}[X]$. Puisque $\deg(P_n') < \deg(P_n)$ on a $\deg(P_n') < \deg(2xP_n)$, et $\deg(P_{n+1}) = \max\{\deg(P_n'), \deg(2XP_n)\} = \deg(2XP_n) = n+1$. Ceci termine la construction.

Exercice 5 : Polynômes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
(Indication : Si $P = (X-1)Q_1 + R_1$, calculer le reste de la division de Q_1 par $X-2$ et $X-3$. Si $Q_1 = (X-2)Q_2 + R_2$, calculer le reste de la division de Q_2 par $X-3$. Conclure.)

Solution On a $P(X) = (X-1)Q_1 + 3$. Donc $(2-1)Q_1(2) = P(2) - 3 = 7 - 3 = 4$ et $Q_1(2) = 4 = R_2$. De même, $(3-1)Q_1(3) = P(3) - 3 = 13 - 3 = 10$ et $Q_1(3) = 5$. Maintenant $Q_1 = (X-2)Q_2 + R_2$, et donc $(3-2)Q_2(3) = Q_1(3) - R_2$ et $Q_2(3) = 5 - 4 = 1$. Ainsi $Q_2 = (X-3)Q_3 + 1$, et
$$\begin{aligned} P &= (X-1)Q_1 + 3 = (X-1)[(X-2)Q_2 + 4] + 3 = (X-1)\{(X-2)[(X-3)Q_3 + 1] + 4\} + 3 \\ &= (X-1)(X-2)(X-3)Q_3 + (X-1)[(X-2)+4] + 3 = (X-1)(X-2)(X-3)Q_3 + (X-1)(X+2) + 3. \end{aligned}$$
Les reste est donc $(X-1)(X+2) + 3 = X^2 + X + 1$.