Université Claude Bernard Lyon 1
Cursus prépa - Première année

Semestre d'automne 2024-2025

Mathématiques - DS n°4 CUPGE

Documents et calculettes interdits

Exercice 1 : Les complexes.

1. Montrer que $|a+b+c| = |ab+bc+ca|$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{U}$.
2. Résoudre le système d'inconnues $x+y = 5+i$ et $xy = 8+i$.
3. Caractériser géométriquement l'application complexe $f(z) = (1+i\sqrt{3})z + (1-i)$.

Exercice 2 : Arithmétique.

1. (a) Enoncer le petit théorème de Fermat.
   (b) En déduire que si p est premier et $n, k \in \mathbb{N}^{\times}$ avec $n \equiv 1 \mod p^k$ alors $n^p \equiv 1 \mod p^{k+1}$.
   (c) En déduire que si p est premier, alors pour tous $n \in \mathbb{N}$ premier à p on a $n^{p^{k-1}(p-1)} \equiv 1 \mod p^k$.
2. Donner toutes les solutions de l'équation diophantienne $40x - 106y = 6$.

Exercice 3 : Continuité.

1. Soit D une partie dense de $\mathbb{R}$.
   (a) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in D$ alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que si $h \restriction_D$ est strictement croissante, alors h aussi.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application continue et surjective.
   (a) Montrer que $f \restriction [0, x]$ possède un maximum a_x et un minimum b_x pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. (Il suffit d'appliquer correctement un théorème du cours.)
   (b) Si $f(x) = a$ pour un $a \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $x' > x$ avec $f(x') = a$.
   (Indication : Considérer $y, y' \in \mathbb{R}$ avec $f(y) = a_x + 1$ et $f(y') = b_x - 1$, et étudier le comportement de f entre y et y'.)
   (c) En déduire que $f^{-1}[\{a\}]$ est infini pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 : Dérivabilité.

1. (a) Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que si f' possède une limite finie en a, alors f est prolongeable en une fonction dérivable sur $[a, b]$ dont la dérivée est continue en a.
   (Attention : Il manque une hypothèse pour appliquer le théorème de la prolongation dérivable.)
   (Indication : Montrer d'abord $\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x, y \in]a, a+\delta], \ |f(x) - f(y)| < \epsilon$.)
   (b) Donner un exemple d'une fonction dérivable $g : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telle que g' possède une limite finie en 0 mais g n'est pas prolongeable en 0 par continuité.
2. Soit $h(x) = e^{x^2}$ de domaine $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $h^{(n)}(x) = P_n(x)e^{x^2}$. Spécifier le degré de P_n.

Exercice 5 : Polynômes.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$. (Indication : Si $P = (X-1)Q_1 + R$, calculer le reste de la division de Q_1 par $X-2$ et $X-3$. Si $Q_1 = (X-2)Q_2 + R_2$, calculer le reste de la division de Q_2 par $X-3$. Conclure.)