
Devoir surveillé N°4
Durée : 1h30

Le candidat ou la candidate attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifiée sera considérée comme nulle.** Calculatrices et notes de cours sont interdites. Le sujet est **recto-verso**. Le barème indiqué est approximatif.

Exercice 1 (8 points).

1. Sachant qu'il admet une racine réelle, déterminer cette racine réelle et puis factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme

$$P(z) = z^3 + (1 - 3i)z^2 - (6 - i)z + 10i.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$ calculer

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx).$$

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(kx).$$

Solution:

1. (**4 points**). Une racine réelle x du polynôme doit vérifier la relation $x^3 + x^2 - 6x = 0$, d'où $x = 0$ ou bien $x^2 + x - 6 = 0$. Les racines du polynôme $x^2 + x - 6 = 0$ sont $x = 2$ et $x = -3$; on vérifie que $x = 2$ est une racine réelle de P . Par la division euclidienne on a :

$$P(z) = (z - 2) [z^2 + 3(1 - i)z - 5i].$$

Le discriminant de $z^2 + 3(1 - i)z - 5i$ est $\Delta = 2i = (1 + i)^2$ de sorte que ses racines sont $z_1 = 2i - 1$ et $z_2 = i - 2$. Il s'en suit que la décomposition de P en facteurs irréductibles est :

$$P(z) = (z - 2)(z + 1 - 2i)(z + 2 - i).$$

2. (**4 points**) Par définition et la formule du binôme,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(kx) + i \sin(kx)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n.$$

L'équation équivaut à $\Re(S_n(x)) = \Im(S_n(x))$, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ((1 + e^{ix})^n + (1 + e^{-ix})^n) = \frac{1}{2i} ((1 + e^{ix})^n - (1 + e^{-ix})^n) \\ \iff & (1 - i)(1 + e^{ix})^n = (1 + i)(1 + e^{-ix})^n \\ \iff & (e^{inx} - i)(1 + e^{ix})^n = 0 \\ \iff & 1 + e^{ix} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{inx} = i. \end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions

$$\{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (*)$$

NB. On peut aussi écrire $S_n(x) = (2e^{ix/2} \cos(x/2))^n$, ce qui implique que

$$\Re(S_n(x)) = \Im(S_n(x)) \iff \cos(x/2) = 0 \text{ ou } \cos(nx/2) = \sin(nx/2),$$

et on obtient le même résultat (*).

Exercice 2 (6 points).

1. Calculer le reste de la division de 10^{100} par 13, et par 19.
2. Résoudre le système de congruences dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{13}, \\ x \equiv 9 \pmod{19}. \end{cases}$$

3. En déduire le reste de la division de 10^{100} par 247.

Solution:

1. (**2 points**) On remarque que $247 = 13 \times 19$. Par le petit théorème de Fermat, on a

$$\begin{aligned} 10^{12} &\equiv 1 \pmod{13}, \\ 10^{18} &\equiv 1 \pmod{19}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} 10^{100} &\equiv 10^{12 \times 8 + 4} \equiv 10^4 \equiv 3^4 \equiv 3 \pmod{13}, \\ 10^{100} &\equiv 10^{18 \times 5 + 10} \equiv 10^{10} \equiv 5^5 \equiv 9 \pmod{19}. \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi procéder ainsi :

$$\begin{aligned} \text{mod } 13 : \quad & [10 \equiv -3] \Rightarrow [10^3 \equiv -1] \Rightarrow [10^{100} = (-1)^{3 \cdot 33} \cdot 3 \equiv 3], \\ \text{mod } 19 : \quad & [10^2 \equiv 5] \Rightarrow [10^4 \equiv 6] \Rightarrow [10^8 \equiv -2] \Rightarrow [10^9 \equiv -1] \Rightarrow [10^{100} = (-1)^{9 \cdot 11} \cdot 10 \equiv 9]. \end{aligned}$$

2. (**3 points**) Les entiers 13 et 19 étant premiers entre eux, par les divisions euclidiennes successives

$$19 = 1 \times 13 + 6, \quad 13 = 2 \times 6 + 1,$$

on déduit une identité de Bézout $3 \cdot 13 + (-2) \cdot 19 = 1$. Par le théorème des restes chinois, la solution du système est donnée par

$$x \equiv 9 \cdot 3 \cdot 13 + 3 \cdot (-2) \cdot 19 \equiv 3 \cdot 79 \equiv 237 \pmod{247}.$$

3. (**1 point**) On en déduit que le reste de la division de 10^{100} par 247 est 237.

Exercice 3 (4 points).

- Déterminer la forme complexe de la rotation r de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Préciser l'image par r du point A d'affixe $e^{-i\pi/3}$.
- Soit t la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe $z_1 = z - \sqrt{3}i$.
 - Caractériser la transformation t .
 - Donner la forme complexe de $t \circ r$.
Reconnaître cette nouvelle transformation en déterminant ses éléments caractéristiques.

Solution:

1. (**1 points**) La rotation r de centre $\Omega(-1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est la transformation qui, à tout z associé $z' = r(z)$ tel que

$$z' - z_{\Omega} = e^{i\pi/3}(z - z_{\Omega}) \Leftrightarrow z' = e^{i\pi/3}(z + 1) - 1.$$

L'image par r du point A d'affixe $e^{-i\pi/3}$ est le point d'affixe $e^{i\pi/3}$.

2. a) (**1 points**) Si on note $\vec{w}$ le vecteur d'affixe $-\sqrt{3}i$, alors la transformation t est la translation de vecteur $\vec{w}$.
- b) (**2 points**) Pour tout complexe z ,

$$\begin{aligned} t \circ r(z) &= (e^{i\pi/3}(z + 1) - 1) - i\sqrt{3} \\ &= e^{i\pi/3}(z + 1) - 2e^{i\pi/3} \\ &= e^{i\pi/3}(z - 1). \end{aligned}$$

Déterminons les points fixes de cette transformation en résolvant l'équation $t \circ r(z) = z$, à savoir,

$$e^{i\pi/3}(z - 1) = z \Leftrightarrow e^{i2\pi/3}z = e^{i\pi/3} \Leftrightarrow z = e^{-i\pi/3}.$$

On reconnaît l'affixe du point A. L'unique point fixe de la transformation $t \circ r$ est le point A. En écrivant $t \circ r(z) = e^{i\pi/3}(z - z_A) + z_A$ on reconnaît que la transformation $t \circ r$ est la rotation du centre A et d'angle $\pi/3$.

Exercice 4 (8 points).

On considère l'application $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $] - 1, 1[$ et démontrer que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^4}} & \text{si } x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. Montrer que l'application dérivée $f' :] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $] - 1, 1[$ et calculer ses limites en -1^+ et 1^- .
4. Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe. En déduire que f est injective.
5. On désigne par $\hat{f}$ la bijection de $[-1, 1]$ sur $f([-1, 1])$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$, pour tout $x \in [-1, 1]$ et on désigne par $\hat{f}^{-1}$ sa bijection réciproque. Justifier l'existence et déterminer $((\hat{f})^{-1})'(0)$.

Solution:

1. (**1 points**) D'abord la fonction f est bien définie car $1 - x^2 \geq 0$ pour $x \in [-1, 1]$ et continue pour $x \neq 0$. Il reste à vérifier si f est continue en 0. On utilise l'expression conjuguée

$$\frac{1}{x} (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}) = \frac{(1+x^2) - (1-x^2)}{x(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}.$$

Par suite,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = \frac{0}{2} = 0.$$

Donc f est continue sur $[-1, 1]$.

2. (**2 points**) Pour $x \in] - 1, 1[\setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})' x - (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})}{x^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) x^2 - (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})}{x^2} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}) x^2 - \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1-x^2} (\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2})}{x^2 \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}) x^2 - (1+x^2)\sqrt{1-x^2} + (1-x^2)\sqrt{1+x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^4}} \\ &= \frac{-\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^4}}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que f est dérivable en 0. On calcule le taux de variation

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

3. (2 points) f' est continue pour $x \neq 0$ et $f'(0) = 1$. De plus,

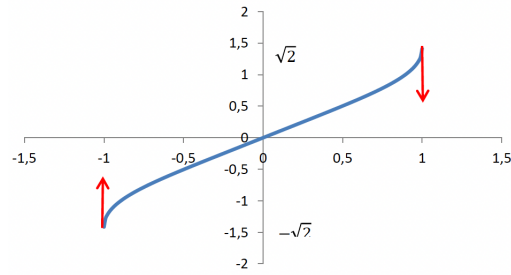
$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, 1[, f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^4}(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2})} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$$

Donc f' est continue sur $] -1, 1[$.

4. (2 points) On voit que $f(-1) = -\sqrt{2}$, $f(1) = \sqrt{2}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante, donc f est injective. Il s'en suit que $\hat{f} : x \mapsto f(x)$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $f([-1, 1]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Comme f' est paire, les limites en -1 et 1 sont égales, par suite,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\sqrt{1-x^4}(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2})} = +\infty.$$

x	-1	0	1
$f'(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$



5. (1 point) $\hat{f} : [-1, 1] \rightarrow [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ est une bijection. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) \neq 0$, donc $\hat{f}^{-1}$ est dérivable en tout $y \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et

$$(\hat{f}^{-1})'(y) = \frac{1}{\hat{f}'(\hat{f}^{-1}(y))}.$$

En particulier, on a

$$(\hat{f}^{-1})'(0) = \frac{1}{\hat{f}'(\hat{f}^{-1}(0))} = \frac{1}{\hat{f}'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{\hat{f}'(0)} = 1.$$

Exercice 5 (4 points).

On rappelle que $\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{n-j+1}{j}$ pour $1 \leq k \leq n$.

- 1) Énoncer le lemme de Gauss.
- 2) Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[k \wedge n = 1 \implies n | \binom{n}{k}]$.
- 3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1) | \binom{2n}{n}$.

Solution:

- 1) (**1 point**) Lemme de Gauss : Soient a, b et c des entiers tels que a et b sont premiers entre eux et a divise bc , alors a divise c .
- 2) (**1,5 points**) Pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $n \binom{n-1}{k-1} = k \binom{n}{k}$, ce qui implique que $n | k \binom{n}{k}$.
Donc, si $k \wedge n = 1$, par le lemme de Gauss, on en déduit que $n | \binom{n}{k}$.
- 3) (**1,5 points**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \binom{2n}{n} = (n+1) \binom{2n}{n-1}$, ce qui implique que $(n+1) | n \binom{2n}{n}$.
Comme $n \wedge (n+1) = 1$ car $(n+1) - n = 1$ (Bézout), et par le lemme de Gauss, on en déduit que $(n+1) | \binom{2n}{n}$.